Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

10. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WiSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2017/CoMaI.php

Abgabe: Donnerstag, 25. Januar 2018, 14:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP + 2 Bonus TP)

a) Zeigen Sie, dass die Kondition einer Diagonalmatrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$M_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und } \lambda_i \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ durch $\kappa_\infty(M) = \frac{\max_{i=1\dots,n}|\lambda_i|}{\min_{i=1\dots,n}|\lambda_i|}$ gegeben ist.

b) Bestimmen Sie explizit Vektoren $b, \widetilde{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass für $x := M^{-1}b$ und $\widetilde{x} := M^{-1}\widetilde{b}$ die Gleichung

$$\frac{\|x - \widetilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \kappa_\infty(M)\,\frac{\|b - \widetilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

gilt.

2. Aufgabe (4 TP + 2 Bonus TP)

Zu $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Matrix $A(x) := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $A(x)$ invertierbar?

b) Berechnen Sie $A(x)^{-1}$.

c) Berechnen Sie $\kappa_\infty(A(x))$.

d) Was geschieht mit $\kappa_\infty(A(x))$ in der Nähe der x_0, für die $A(x_0)$ nicht invertierbar ist?

e) Geben Sie ein x an, für das $\kappa_\infty(A(x)) \leq 5$ gilt.

3. Aufgabe (4 TP)

Seien $A, \widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $x, \widetilde{x}, b, \widetilde{b} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Gelte weiter $b \neq 0$, $Ax = b$, $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$ und $\|A - \widetilde{A}\| < 1/\|A^{-1}\|$. Beweisen Sie die Abschätzung

$$\frac{\|x - \widetilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|A - \widetilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \widetilde{b}\|}{\|b\|}\right) + o(\|A - \widetilde{A}\| + \|b - \widetilde{b}\|)$$

für $\|A - \widetilde{A}\| + \|b - \widetilde{b}\| \to 0$. Hierbei ist $\kappa(A)$ die Kondition von A bezüglich der $\|\cdot\|$-Norm.