

12. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WiSe 2017

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS\\_2017/CoMaI.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2017/CoMaI.php)

**Abgabe: Keine.**

Bei den folgenden Aufgaben handelt es sich nicht um Aufgaben im klassischen Sinne, sondern vielmehr um Anregungen, die Ihnen beim Wiederholen der Vorlesungsinhalte behilflich sein sollen. Zum Teil lassen sich aus diesen Aufgaben direkt typische Klausuraufgaben ableiten, es handelt sich aber zu einem Großteil auch schlichtweg um grundlegende Fragen, die versuchen, die Begriffsfestigkeit und das Verständnis wesentlicher Konzepte sicherzustellen. Dieses Dokument ist inhaltlich keineswegs allumfassend, weswegen Sie sich zur Klausurvorbereitung auch auf das Studium Ihrer eigenen Aufzeichnungen und des Skripts stützen sollten.

Sie dürfen sich beim Bearbeiten natürlich beliebiger Unterlagen bedienen, allerdings sollten Sie dennoch versuchen, die Fragen zunächst möglichst ohne die Verwendung jeglicher Hilfsmittel zu beantworten.

**Zahlendarstellungen**

1) Ganzzahlen, Zweierkomplement

- a) Sei  $(a_n \dots a_0)_q$  eine  $q$ -adische Zahlendarstellung. Welchem Element in  $\mathbb{N}$  ist diese Zahlendarstellung zugeordnet? (Gemeint ist: Was ist die Formel, mit der man aus solch einer Zahlendarstellung den dazugehörenden Zahlenwert ermitteln kann?)
- b) Wählen Sie ein beliebiges Element  $x \in \mathbb{N}$  und eine beliebige Basis  $q$ . Stellen Sie  $x$  bezüglich der Basis  $q$  dar.
- c) Umgekehrt: Geben Sie sich eine beliebige Zahlendarstellung  $a = (a_n \dots a_0)_q$  vor. Stellen Sie  $a$  bezüglich des Dezimalsystems dar.
- d) Wir betrachten nun eine Speicherstelle im Computer mit  $n \in \mathbb{N}$  Bits. Wie viele verschiedene Zahlenwerte können in dieser Stelle gespeichert werden?
- e) Wählen Sie beliebige  $n, x \in \mathbb{N}$ . Stellen Sie  $-x$  als  $n$ -Bit-Zahl dar, indem Sie Vorzeichenbits verwenden. Wie groß darf  $x$  höchstens sein, damit diese Darstellung ohne Informationsverlust möglich ist?
- f) Stellen Sie diese Zahl anschließend auch bezüglich des Zweierkomplements dar.
- g) Was sind Vorteile des Zweierkomplements gegenüber dem Abspeichern mit Vorzeichenbit?

**Anmerkung:** Sollten Sie sich beim Ausdenken neuer Zahlenkombinationen etwas un-kreativ fühlen, so können sie beispielsweise in Matlab mittels des Befehls `randi([0 q-1], 1, n)` einen Vektor von Zufallszahlen erstellen, der äquivalent auch als eine Zahl der Länge  $n$  in Basis  $q$  aufgefasst werden kann.

Falls Sie Ihre Ergebnisse auf Richtigkeit gegenprüfen möchten, können Sie beispielsweise online nach einem “Base Number Converter” suchen oder Sie implementieren die entsprechenden Routinen einfach selbst. Für die Umwandlung von Binär- in Dezimalzahlen und umgekehrt sei hier an die Matlab-Routinen `dec2bin` und `bin2dec` erinnert.

## 2) Festkommazahlen, Periodische Brüche

- a) Sei  $(a_n \dots a_0.a_{-1} \dots a_{-m})_q$  ein  $q$ -adischer Bruch. Wie lautet die Formel, um hieraus das dadurch beschriebene Element in  $\mathbb{Q}$  zu bestimmen?
- b) Machen Sie sich anschaulich bewusst: Was ist für festes  $n$  und  $m$  die Menge aller Zahlen, die so dargestellt werden können? Allgemeiner: Welche Zahlen können als endlicher  $q$ -adischer Bruch dargestellt werden?
- c) Wählen Sie nun  $x \in \mathbb{Q}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , von denen Sie eine endliche Darstellung erwarten und berechnen sie diese.
- d) Umgekehrt, geben Sie sich einen beliebigen  $q$ -adischen Bruch vor und rechnen sie das dazugehörige Element in  $\mathbb{Q}$  aus, indem Sie die Darstellung als Dezimalbruch angeben.
- e) Wie lautet die Formel, um aus einem periodischen  $q$ -adischen Bruch den äquivalenten (möglicherweise periodischen) Dezimalbruch zu ermitteln? Erinnern Sie sich an die geometrische Reihe.
- f) Was ist die Menge aller Zahlen, die als periodischer  $q$ -adischer Bruch dargestellt werden können? Warum?
- g) Wählen Sie nun Kombinationen, bei denen keine endliche Darstellung mehr möglich ist. Stellen Sie diese Zahlen als periodische  $q$ -adische Brüche dar. Geben Sie sich auch wieder umgekehrt einen periodischen  $q$ -adischen Bruch vor und rechnen Sie diesen in einen (ggf. periodischen) Dezimalbruch um.

**Anmerkung:** Indem Sie den Zusammenhang  $(a_n \dots a_0.a_{-1} \dots a_{-m})_q = q^{-m}(a_n \dots a_{-m})_q$  verwenden, können Sie auch hier Ihre Ergebnisse leicht überprüfen, indem Sie einen geeigneten Basis-Umrechner für Ganzzahlen verwenden.

## 3) Gleitkommazahlen

- a) Wie ist die Menge  $\mathbb{G}(q, n)$  definiert?
- b) Machen Sie sich den Unterschied zwischen “Gleitkommazahl” und “(normalisierter) Gleitkommadarstellung” bewusst. Was ist die normalisierte Gleitkommadarstellung?
- c) Versuchen Sie, sich die Menge aller darstellbaren Zahlen in  $\mathbb{G}(q, n)$  zu veranschaulichen.
- d) Wie ist die Funktion  $\text{rd}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}(q, n)$  definiert, die reelle Zahlen als Gleitkommazahlen (mit kaufmännischem Runden) approximiert?
- e) Suchen Sie sich auch hier wieder geeignete Beispielwerte  $x \in \mathbb{R}$ ,  $q, n \in \mathbb{N}$ , für die Sie  $\text{rd}(x) \in \mathbb{G}(q, n)$  bestimmen.
- f) Umgekehrt, geben Sie sich eine Zahl in Gleitkommadarstellung vor und stellen Sie diese als Dezimalbruch dar.
- g) Was sind Vorteile von Gleitkommazahlen gegenüber Festkommazahlen?

- h) Wie werden Gleitkommazahlen auf dem Computer abgespeichert? Wie verändert sich dadurch die Menge aller darstellbaren Zahlen?
- i) Allgemein: Wann können Gleichheitsabfragen auf dem Computer sinnvoll durchgeführt werden? Was sind mögliche Probleme?
- j) Welche Auswirkung hat das Runden auf grundlegende algebraische Eigenschaften, wie etwa Assoziativität und Distributivität. Welche Konsequenz hat dies für die Durchführung von Berechnungen an Computern?

## Zahlen und Fehler

### 1) Absoluter Fehler

- a) Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ , wobei  $y$  eine Approximation von  $x$  sein soll. Wie ist der absolute Fehler von  $y$  zu  $x$  definiert?
- b) Ist der absolute Fehler von  $y$  zu  $x$  das gleiche wie der absolute Fehler von  $x$  zu  $y$ ?
- c) Wie verhält sich der absolute Fehler bei Approximation reeller Zahlen durch Festkommazahlen?
- d) Wie verhält sich der absolute Fehler bei Approximation reeller Zahlen durch Gleitkommazahlen?

### 2) Relativer Fehler

- a) Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ , wobei  $y$  eine Approximation von  $x$  sein soll. Wie ist der relative Fehler von  $y$  zu  $x$  definiert?
- b) Ist der relative Fehler von  $y$  zu  $x$  das gleiche wie der absolute Fehler von  $x$  zu  $y$ ?
- c) Wie verhält sich der relative Fehler bei Approximation reeller Zahlen durch Festkommazahlen?
- d) Wie verhält sich der relative Fehler bei Approximation reeller Zahlen durch Gleitkommazahlen?
- e) Erklären Sie, was es mit dem Begriff der Maschinengenauigkeit auf sich hat. Wie ist die Maschinengenauigkeit definiert und in welchem Zusammenhang steht sie zu den obigen Fehlerbegriffen?
- f) Allgemein: In welchen Situationen würden Sie eher absolute Fehler betrachten und in welchen eher relative Fehler?

## Kondition

### 1) Absolute Kondition

- a) Wie ist die absolute Kondition  $\kappa_{\text{abs}}(f, x)$  einer Funktion  $f$  im Punkt  $x$  definiert? (Auch, wenn  $f$  nicht differenzierbar ist.)
- b) Wie kann  $\kappa_{\text{abs}}(f, x)$  berechnet werden, wenn  $f$  in  $x$  differenzierbar ist?
- c) Wenn  $\kappa_{\text{abs}}(f, x)$  existiert, ist dieses dann eindeutig? Warum (nicht)?
- d) Was ist die Bedeutung bzw. der Sinn der absoluten Kondition? Was wird hierdurch beschrieben und wieso ist die Kondition ein zentrales Konzept in der numerischen Mathematik?

- e) Wann ist ein Problem “gut” konditioniert, wann “schlecht” konditioniert?
- f) Angenommen, Sie haben ein schlecht konditioniertes Problem vorliegen. Ist es möglich, ein solches Problem in ein gut konditioniertes umzuwandeln? Wenn ja, wie? Überlegen Sie sich ein Beispiel.
- g) Überlegen Sie sich einige Beispiele, für die Sie die absolute Kondition berechnen. Wie berechnen Sie die Kondition, wenn  $f$  in  $x$  nicht differenzierbar ist? Welche Abschätzungen kennen Sie?
- h) Sei  $g$  eine Funktion. Wodurch ist die (absolute) Kondition der Nullstellenauswertung von  $g$  gegeben? Wann ist dies ein wohlgestelltes Problem?

## 2) Relative Kondition

- a) Wie ist die relative Kondition  $\kappa_{\text{rel}}(f, x)$  definiert? Unter welchen Bedingungen ist stets  $\kappa_{\text{rel}}(f, x) = \infty$ ?
- b) Wie kann  $\kappa_{\text{rel}}(f, x)$  dargestellt werden, wenn  $f$  in  $x$  differenzierbar ist?
- c) Überlegen Sie sich einige Beispiele, für die Sie  $\kappa_{\text{rel}}(f, x)$  ausrechnen.
- d) Wie hängen  $\kappa_{\text{abs}}$  und  $\kappa_{\text{rel}}$  zusammen? Wie hängen sie nicht zusammen?
- e) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $*$   $\in \{+, -, \cdot, /\}$ . Wie lässt sich die relative Kondition zur Berechnung von  $a * b$  abschätzen? Ist Ihre Abschätzung scharf?
- f) Erklären Sie den Begriff der Stellenauslöschung für die Subtraktion zweier fast gleich großer Zahlen. Kommt es bei der Subtraktion zweier fast gleich großer Zahlen zwangsläufig zur Stellenauslöschung?

## Stabilität

- 1) Was ist die Definition von (relativer) Stabilität?
- 2) Was ist eine Elementaroperation? Was ist die Stabilität einer Elementaroperation?
- 3) Was ist ein Algorithmus (im mathematischen Sinne)?
- 4) Wieso ist die Stabilität ein weiteres grundlegendes Konzept in der numerischen Mathematik? Gehen Sie dabei auch auf den Unterschied zur Kondition ein.
- 5) Wann ist ein Algorithmus stabil bzw. instabil? Was sind Strategien, um ggf. auftretende Instabilitäten zu beheben, oder zumindest zu reduzieren?
- 6) Welche Abschätzungen für die Stabilität kennen Sie? Denken Sie insbesondere an Algorithmen der Form  $f = g_n \circ \dots \circ g_1$  und  $f = (g_n \circ \dots \circ g_1) * (h_m \circ \dots \circ h_1)$  mit Elementaroperationen  $g_i, h_i$  und  $*$   $\in \{+, -, \cdot, /\}$ .
- 7) Welche Fehlerabschätzungen können Sie aus der Stabilität ableiten?
- 8) Überlegen Sie sich verschiedene Algorithmen, deren Stabilität sie anschließend abschätzen. Sie müssen dabei nicht zwangsläufig nur arithmetische Operationen als Elementaroperatoren zulassen.

Schaffen Sie es auch, für ein Beispiel eines einfachen Algorithmus (also etwa  $f = g_2 \circ g_1$  oder  $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ ) die exakte Stabilität zu bestimmen?

## Komplexität

### 1) Landau-Symbole

- Sei  $g$  eine Funktion. Wie sind jeweils  $\mathcal{O}(g)$  und  $o(g)$  für  $x \rightarrow x_0$  (bzw. für  $x \rightarrow \infty$ ) definiert? Welche äquivalenten Definitionen kennen Sie?
- Warum ist das “ $x \rightarrow x_0$ ” wichtig? Geben Sie ein Beispiel an, für das  $f \in \mathcal{O}(g)$  für  $x \rightarrow \infty$  gilt, aber  $f \notin \mathcal{O}(g)$  für  $x \rightarrow x_0$ .
- Welche Rechenregeln sind im Umgang mit diesen Landau-Symbolen zu beachten? Insbesondere: Seien  $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$  und  $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$  für  $x \rightarrow x_0$  (bzw.  $f_i \in o(g_i)$ ). Was lässt sich dann über  $f_1 \pm f_2$ ,  $f_1 \cdot f_2$ ,  $f_1/f_2$ ,  $f_1 \circ f_2$  (nicht) aussagen? Überlegen Sie sich ggf. geeignete Gegenbeispiele.
- Prüfen Sie die folgende Argumentation auf Richtigkeit und erklären Sie ggf. die Fehler und passen Sie die Umformungen entsprechend an.

$$\begin{aligned} x^2 + x &= x + x^3 + f(x) \\ \implies \mathcal{O}(x) + x &= x + \mathcal{O}(x) + f(x) \quad \text{für } x \rightarrow 0 \\ \implies f(x) &= 0 \end{aligned}$$

### 2) Rechenaufwand spezifischer Algorithmen

- Was ist der Rechenaufwand für das Addieren von  $n$  Zahlen?
- Welche Algorithmen zum Sortieren kennen Sie und wodurch ist deren Rechenaufwand gegeben?
- Welche Algorithmen zur Bestimmung des ggT's kennen Sie und wodurch ist deren Rechenaufwand gegeben? Soweit bekannt, geben Sie auch jeweils den Aufwand für den “best case” und den “worst case” an. Wann treten diese Fälle jeweils ein?
- Der Wert von  $\cos(x)$  kann durch

$$\cos(x) \approx \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} =: f(N)$$

mit  $N \in \mathbb{N}$  approximiert werden. Überlegen Sie sich einen Algorithmus für  $f(N)$  als Pseudo-Code und bestimmen Sie dessen Komplexität in Abhängigkeit von  $N$ .

## Lineare Gleichungssysteme

### 1) Normen

- Welche Eigenschaften muss eine Norm allgemein erfüllen?
- Wie ist die  $p$ -Norm  $\|\cdot\|_p$  für  $p \in [1, \infty)$  auf  $\mathbb{R}^n$  definiert? Was ist die euklidische Norm und was ist die Maximumsnorm?
- Warum ist die  $p$ -Norm nicht für  $p < 1$  definiert?
- Was ist die Äquivalenz von Normen (im Endlichdimensionalen)? Wovon hängen die darin vorkommenden Konstanten ab und wovon nicht?

- e) Wie ist die induzierte Matrixnorm (bezüglich einer Vektornorm  $\|\cdot\|$ ) definiert? Welche äquivalenten Definitionen kennen Sie? Welche Eigenschaften folgen aus dieser Definition? Ist jede Matrix-Norm von einer Vektornorm induziert?
- f) Wie sind die Zeilensummennorm bzw. die Spaltensummennorm definiert? Welchen Zusammenhang gibt es zu den  $p$ -Normen?
- g) Wählen Sie eine beliebige Matrix und berechnen Sie anschließend deren Zeilensummennorm und Spaltensummennorm. Schaffen Sie es für einfache Matrizen auch, die  $\|\cdot\|_2$ -Norm der Matrix zu berechnen?

## 2) Matrixkondition

- a) Wie ist die Kondition einer Matrix definiert? Wie hängt diese Definition von den verwendeten Normen ab?
- b) Welche Fehlerabschätzungen lassen sich aus der Kondition ableiten? Wenden Sie diese Abschätzungen ggf. zur Illustration auch anhand eines konkreten Beispiels an.
- c) Wählen Sie beliebige/geeignete Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und berechnen Sie deren Kondition bezüglich Zeilen- oder Spaltensummennorm.

## 3) Gauß-Elimination

- a) Wie ist der Gauß-Eliminationsalgorithmus definiert? Was ist die Rücksubstitution?
- b) Überlegen Sie sich eine geeignete Beispielmatrix  $A$ , für die Sie die LR-Zerlegung mittels Gauß-Algorithmus ohne Zeilen- oder Spaltenvertauschen berechnen. Wählen Sie anschließend eine rechte Seite  $b$ , für die Sie mittels Rücksubstitution das Gleichungssystem  $Ax = b$  lösen.

Geben Sie die Matrizen  $L$  und  $R$  an und überprüfen Sie, ob  $LR = A$  und  $Ax = b$  tatsächlich erfüllt ist.

Achtung: Falls Sie trotzdem Zeilen bzw. Spalten vertauschen möchten, dann müssen Sie sich auch noch die dazugehörigen Permutationsmatrizen merken.

- c) Was ist Zeilenpivotisierung und wozu ist diese gut?
- d) Was ist der Rechenaufwand der LR-Zerlegung? Was ist der Rechenaufwand der Rücksubstitution?
- e) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Wie kann mittels Gauß-Algorithmus (also LR-Zerlegung von  $A$  und Rücksubstitution für Vektoren) ein  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  bestimmt werden, sodass  $AX = B$  gilt? Mit welchem Rechenaufwand ist dies verbunden?
- f) Gibt es Algorithmen mit weniger Rechenaufwand als die Gauß-Elimination? Wenn ja, welche sind dies und unter welchen Bedingungen sind diese anwendbar?
- g) Was wissen Sie über die Stabilität des Gauß-Algorithmus?