

3. Übung zur Vorlesung
COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I
WS 2018/19
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2018/CoMaI.php

Abgabe: 12.11.18

1. Aufgabe (6 Theorie-Punkte)

Für $x, y, s \in \mathbb{R}$ mit $x, y, s > 0$ soll mit dem Rechner mit Maschinengenauigkeit ϵ überprüft werden, ob

$$x + y = s \quad (1)$$

gilt. Dabei ist zu beachten, daß im Rechner nur $\text{rd}(x)$, $\text{rd}(y)$, $\text{rd}(s)$ darstellbar sind. Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, dass die Addition *nicht* mit einer weiteren Rundung verbunden ist, dass also $\text{rd}(\text{rd}(x) + \text{rd}(y)) = \text{rd}(x) + \text{rd}(y)$ gilt:

a) Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Prüfung von

$$\text{rd}(x) + \text{rd}(y) = \text{rd}(s) \quad (2)$$

nicht sinnvoll ist, d.h. im allgemeinen nicht „(1) \Rightarrow (2)“ gilt.

b) Zeigen Sie, daß „(1) \Rightarrow (3)“ gilt, daß also die Abfrage

$$|\text{rd}(x) + \text{rd}(y) - \text{rd}(s)| \leq 4|\text{rd}(s)|\epsilon \quad (3)$$

sinnvoll ist.

2. Aufgabe (4 Theorie-Punkte)

Es sei $x > 0$ mit $\text{rd}(x) > 0$ gegeben, ϵ bezeichne wieder die Maschinengenauigkeit.

a) Zeigen Sie zuerst, dass

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{|\text{rd}(x) - x|}{|\text{rd}(x)|}(1 + \epsilon),$$

b) Zeigen Sie, dass daher auch die Beziehung

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} = \frac{|\text{rd}(x) - x|}{|\text{rd}(x)|} + o(\epsilon),$$

gilt.

3. Aufgabe (2 Theorie-Punkte)

Es seien Funktionen $f(x) = o(x)$ und $g(x) = o(x)$ für $x \rightarrow 0$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$f(x) + g(x) = o(x).$$

Hinweis zu den Beweisen:

Sie dürfen die in der Vorlesung vorgestellte Darstellung der Rundung einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ in der Form $\text{rd}(x) = \tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x)$ mit $|\varepsilon_x| < \text{eps}$, sowie o.B.d.A. $\text{eps} < 1/4$ und die daraus folgende Abschätzung

$$\frac{1}{1 - \text{eps}} < \frac{4}{3}$$

verwenden.

Allgemeine Hinweise:

Bitte senden Sie grundsätzlich den Matlab-Code (*.m-File) unter dem Betreff *CoMa* per E-Mail an Ihren Tutor. Denken Sie daran, Ihre Programme gut zu kommentieren (Kommentar hinter ein %-Zeichen setzen). Senden Sie Programmcode, Testlauf (Programmaufruf und zugehörige Ausgabe) und eventuelle Plots per E-Mail und drucken sie den Code aus und legen Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben in das Fach Ihres Tutors.