Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Ch. Schuette, J. Zonker

6. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2018/19

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2018/CoMaI.php

Abgabe: 10.12.18

1. Aufgabe (4 Theorie-Punkte)
Finden Sie eine geeignete Umformung für die untenstehenden Ausdrücke, so dass die Auswertung möglichst stabil ist ($x > 0$, sowie $a, b > 0$). Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

a) $\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)-x}{x^2-1}$

b) $\sqrt{ax+b} - \sqrt{a^3x^3 + 3a^2x^2b + 3axb^2 + b^3}$

2. Aufgabe (8 Theorie-Punkte)
Es soll die Funktion $f(x) = (a - bx)^2$ an der Stelle x_0 ausgewertet werden. Bestimmen Sie obere Schranken für die relative Stabilität der beiden folgenden Algorithmen:

a) $f(x) = (g_2 \circ g_1)(x) + (g_4 \circ g_3)(x)$ mit

$$g_1(x) = 2abx, \qquad g_2(y) = a^2 - y, \qquad g_3(x) = x^2, \qquad g_4(y) = b^2 y.$$

b) $f(x) = (h_3 \circ h_2 \circ h_1)(x)$ mit

$$h_1(x) = bx, \qquad h_2(y) = a - y, \qquad h_3(z) = z^2.$$

Sie können die Funktionen g_i, $i = 1, 2, 3, 4$ und h_j, $j = 1, 2, 3$ dabei als Elementarfunktionen betrachten, müssen also eventuelle Rundungsfehler bei ihrer Realisierung durch weitere Zerlegung in Rechenschritte nicht berücksichtigen.

Wir dürfen folgende Aussage benutzen:
Es seien $h : I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$ und $g : I_g \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen und

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

ein Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$. Bezeichnet κ_g die Kondition der Auswertung von g an der Stelle $y = h(x_0)$ und σ_h die relative Stabilität des obigen Algorithmus für h, so gilt für die relative Stabilität σ von

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

die Abschätzung

$$\sigma \leq 1 + \kappa_g \sigma_h \ .$$