Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Ch. Schuette, J. Zonker

11. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2018/19

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2018/CoMaI.php

Abgabe: 04.02.19

1. Aufgabe (2+3 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Für $x \to \infty$: $f(x) = \mathcal{O}(x)$, $g(x) = \mathcal{O}(x^2) \Longrightarrow f(x) \cdot g(x) = \mathcal{O}(x^3)$

b) für $x \to 0$: $3x^3 + (1-x)(1+x) = o(x^2)$

2. Aufgabe (3+3+4 Punkte)

a) Berechnen Sie die relative Kondition der Auswertung der Funktion $h(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1.000001 = 1 + \alpha$, d.h. mit $\alpha = 10^{-6} > 0$.

b) Zur Auswertung der Funktion h an der Stelle $x_0 = 1.000001$ soll zuerst der Wert $\sqrt{x}$, dann $(\sqrt{x}+1)$ und $(x-1)$ und dann der Quotient berechnet werden. Geben Sie geeignete Elementaroperationen an und erstellen und beschriften Sie den zugehörigen Auswertungsbaum.

c) Berechnen Sie grob eine obere Schranke für die relative Stabilität des Algorithmus aus b). Hinweis: Verwenden Sie die iterative Vorgehensweise auf Grundlage des Auswertungsbaums.

3. Aufgabe (4+4+2 Punkte)
Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine LR-Zerlegung in $A = LR$ ohne Pivotsuche durch, d.h. bestimmen Sie R und L. Für welche ϵ ist A invertierbar?

b) Sei $0 < \epsilon < 1$. Berechnen Sie die Kondition $\kappa(R)$ der Matrix R bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

c) Für welche $0 < \epsilon < 1$ ist die Matrix R schlecht konditioniert?

Hinweis: Die Inverse einer regulären oberen Dreiecksmatrix R existiert und ist ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix, auf deren Diagonale die Inversen der Diagonaleinträge von R stehen.

4. Aufgabe (4 Programmier-Punkte)
Betrachten Sie die sogenannte Vandermonde-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit den Einträgen

$$A_{ij} = x_i^j$$

für $x_i = ih$ mit $h > 0$. Erstellen Sie die Vandermonde-Matrix für $h = 0.1$ in MATLAB und berechnen Sie Kondition der Matrix bzgl. der Maximumsnorm für $n = 6, 8, 10, 12, 14$. Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

Allgemeine Hinweise:

Diese Übung dient der Vorbereitung der Klausur. Die Aufgaben 1,2 und 3 sind nicht abzugeben und werden nicht kontrolliert. Die dort angegebenen Punkte zeigen, wie der entsprechende Aufgabenteil in der Klausur gewichtet würde. Aufgabe 4 kann abgegeben werden. Die dort (und nur dort) erzielten Punkte können noch zur Erreichung der Mindestpunktzahl verwendet werden.

Bitte laden Sie MatLab-Code grundsätzlich unter dem zugehörigen Assignment im KVV hoch. Denken Sie daran, Ihre Programme gut zu kommentieren (Kommentar hinter ein %-Zeichen setzen). Laden Sie Programmcode, Testlauf (Programmaufruf und zugehörige Ausgabe) und eventuelle Plots ins KVV hoch und drucken sie den Code aus und legen Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben in das Fach Ihres Tutors.