COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Computer-orientierte Mathematik

1. Vorlesung

25.10.18

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

- kennt jedes Kind
- beginnen mit 0 oder 1
- gut geeignet zum Abzählen
- keine Schulden, keine Tortenstücke
- ...

Die natürlichen Zahlen (axiomatisch)

Definition: $\mathbb{N}$ ist die Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$.
- Es gibt eine Abbildung $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

(S1) S ist injektiv (d.h. $S(n) \neq S(m)$ falls $n \neq m$)

(S2) $0 \notin S(\mathbb{N}) = \{S(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(S3) Ist $M \subset \mathbb{N}$ und gilt $0 \in M$ und $S(M) \subset M$ so gilt $M = \mathbb{N}$.

Anschaulich:
Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger $S(n)$.

Definition der Addition:

(A1) $n + 0 = n$

(A1) n+S(m)=S(n+m)

Definition der Addition:

(A1) $n + 0 = n$

(A1) n+S(m)=S(n+m)

Nachweis der Rechenregeln:

Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$

Kommutativität: $n + m = m + n$

Definition der Addition:

(A1) $n + 0 = n$

(A1) n+S(m)=S(n+m)

Nachweis der Rechenregeln:

Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$

Kommutativität: $n + m = m + n$

Folgerung:

Wir können mit natürlichen Zahlen rechnen.

Definition der Addition:

(A1) $n + 0 = n$

(A1) n+S(m)=S(n+m)

Nachweis der Rechenregeln:

Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$

Kommutativität: $n + m = m + n$

Folgerung:

Wir können mit natürlichen Zahlen rechnen.

Aber:

Bevor wir die Summe zweier natürlicher Zahlen ausrechnen können muss jede natürliche Zahl genau einen Namen haben!

Ziffernketten

Problem:

unendlich viele natürliche Zahlen $\Leftrightarrow$ unendlich viele Namen

Ziffernketten

Problem:
unendlich viele natürliche Zahlen $\Leftrightarrow$ unendlich viele Namen

Lösung:
Ziffernketten: $z_1 z_2 z_3 \dots z_k \qquad z_i \in \mathcal{Z}, \quad i = 1, \dots, k$

Endliche Menge von Ziffern $\mathcal{Z}$!

Problem:

unendlich viele natürliche Zahlen $\Leftrightarrow$ unendlich viele Namen

Lösung:

Ziffernketten: $z_1 z_2 z_3 \dots z_k \qquad z_i \in \mathcal{Z}, \quad i = 1, \dots, k$

Endliche Menge von Ziffern $\mathcal{Z}$!

Interpretationen:

- Systematische Konstruktion unterschiedlicher Symbole
- Bilden von Worten aus einem Alphabet

Satz:
Sei $\mathcal{Z}$ eine endliche Ziffernmenge und

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{z_1 z_2 \ldots z_k \mid k \in \mathbb{N},\ z_i \in \mathcal{Z},\ i = 1, \ldots, k\}$$

die Menge aller Ziffernketten.
Dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(\mathcal{Z})$.

Satz:

Sei $\mathcal{Z}$ eine endliche Ziffernmenge und

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{z_1 z_2 \dots z_k \mid k \in \mathbb{N},\ z_i \in \mathcal{Z},\ i = 1, \dots, k\}$$

die Menge aller Ziffernketten.

Dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(\mathcal{Z})$.

Definition:

Die Ziffernmenge $\mathcal{Z}$ und die Zuordnung φ erzeugen ein Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{N}$.

Satz:
Sei $\mathcal{Z}$ eine endliche Ziffernmenge und

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{z_1 z_2 \dots z_k \mid k \in \mathbb{N},\ z_i \in \mathcal{Z},\ i = 1, \dots, k\}$$

die Menge aller Ziffernketten.
Dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(\mathcal{Z})$.

Definition:
Die Ziffernmenge $\mathcal{Z}$ und die Zuordnung φ erzeugen ein Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{N}$.

Definition:
Eine Menge M, für die ein bijektives $\varphi : \mathbb{N} \to M$ existiert (die sich durchnumerieren lässt), heißt abzählbar.

Beispiele für Ziffernsysteme

römische Zahlen: $\mathcal{Z} = \{I, V, X, L, C, D, M\}$
kein Ziffernsystem!

römische Zahlen: $\mathcal{Z} = \{I, V, X, L, C, D, M\}$
kein Ziffernsystem!

Unärsystem:

- nur eine Ziffer: $\mathcal{Z} = \{|\}$
- Ziffernketten: $\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{|, ||, |||, \ldots\}$
- Zuordnung: $\varphi(0) =, \ \varphi(1) = |, \ \varphi(n+1) = \varphi(n)|$

römische Zahlen: $\mathcal{Z} = \{I, V, X, L, C, D, M\}$
kein Ziffernsystem!

Unärsystem:

- nur eine Ziffer: $\mathcal{Z} = \{|\}$
- Ziffernketten: $\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{|, ||, |||, \ldots\}$
- Zuordnung: $\varphi(0) =, \ \varphi(1) = |, \ \varphi(n+1) = \varphi(n)|$

Beispiel:
$\varphi(4) = ||||$

...vor 15000-20000 Jahren im Kongo: ...heute:

Potenzzerlegung zur Basis q

Satz:

Sei $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ fest gewählt. Dann lässt sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Potenzzerlegung

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i,$$

darstellen. Dabei sind die Koeffizienten $r_i \in \{0, \ldots, q-1\} \subset \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt.

Satz:

Sei $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ fest gewählt. Dann lässt sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Potenzzerlegung

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i,$$

darstellen. Dabei sind die Koeffizienten $r_i \in \{0, \ldots, q-1\} \subset \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt.

Definition: (q-adische Darstellung)

- Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{z_0, z_1, ..., z_{q-1}\}$
- Zuordnung:

$$n \mapsto \varphi(n) = z_n, \qquad n = 0, \ldots, q-1,$$

und im Falle $n > q-1$

$$n \mapsto \varphi(n) = z_{r_k} z_{r_{k-1}} \ldots z_{r_0} \quad \text{mit} \quad n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i, \quad 0 \leq r_i \leq q-1$$

Dezimalsystem: $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

q-adische Systeme mit $q \leq 36$: Erweiterung um $\{A, B, C \dots, Z\}$

Konventionen:

- keine Unterscheidung zwischen Darstellung und Zahl:

$$z_k z_{k-1} \dots z_{0_q} = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

- kein Basisindex q, falls $q = 10$
- den Index i von z_i nennt man Stelle, $z_k z_{k-1} \dots z_{0_q}$ eine k-stellige Zahl

Ziffernmenge $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$

Ideal für die technische Umsetzung:

- 1 Binärstelle $\Leftrightarrow$ 1 Bit
- Alle modernen Rechenmaschinen arbeiten mit dem Dualsystem.

Ziffernmenge $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$

Ideal für die technische Umsetzung:

- 1 Binärstelle $\Leftrightarrow$ 1 Bit
- Alle modernen Rechenmaschinen arbeiten mit dem Dualsystem.

Zahlenbereich:
Im Dualsystem lassen sich mit N Stellen alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq n \leq 2^N - 1$$

darstellen.

Die ganzen Zahlen (anschaulich)

$$\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$$

- kennt (fast) jedes Kind
- beginnen nirgends
- es gibt positive und negative Zahlen
- Schulden, aber keine Tortenstücke

Problem:

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$

Problem:
Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$

Ausweg:
Erweitere $\mathbb{N}$ um $x = (m, n)$ (wir schreiben m-n)

Die ganzen Zahlen (konstruktiv)

Problem:

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$

Ausweg:

Erweitere $\mathbb{N}$ um $x = (m, n)$ (wir schreiben m-n)

Neues Problem:

nicht eindeutig:

$x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ haben verschiedene Lösungen

Problem:

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$

Ausweg:

Erweitere $\mathbb{N}$ um $x = (m, n)$ (wir schreiben m-n)

Neues Problem:

nicht eindeutig:

$x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ haben verschiedene Lösungen

Neuer Ausweg:

Äquivalenzklassen (siehe Skript, Analysis I, Lineare Algebra I, ...)

Darstellung der positiven Zahlen:

$$z_k z_{k-1} \dots z_{0_q} = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

zusätzliches Symbol: $-$

Darstellung der positiven Zahlen:

$$z_k z_{k-1} \dots z_{0\,q} = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

zusätzliches Symbol: —

Darstellung der negativen Zahlen:

$$-z_k z_{k-1} \dots z_{0\,q} = -\sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Darstellung der positiven Zahlen:

$$z_k z_{k-1} \dots z_{0_q} = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

zusätzliches Symbol: $-$

Darstellung der negativen Zahlen:

$$-z_k z_{k-1} \dots z_{0_q} = -\sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

technische Realisierung: Vorzeichenbit

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Vorzeichenbit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, 111_2, 110_2, 11_2, 00_2, 01_2, 010_2, 011_2, \ldots\}$$

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Vorzeichenbit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, 111_2, 110_2, 11_2, 00_2, 01_2, 010_2, 011_2, \ldots\}$$

Nachteile:

- Keine eindeutig bestimmte Darstellung der Null: $0 = 00_2 = 10_2$
- Addition natürlicher und ganzer Zahlen grundsätzlich verschieden

Kochrezept:

Das Zweierkomplement von $n < 0$ erhält man durch

Dualdarstellung, jedes Bit Umklappen und 1 addieren

Beispiel: $N = 4$ Bits vorhanden und $n = -3$

$$\underbrace{-3}_{\text{Dezimalzahl}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{-0011}_{\text{Dualdarstellung}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{-1100}_{\text{umklappen}} \rightarrow \quad \underbrace{1101}_{\text{Zweierkomplement}}$$

komplementäre Potenzzerlegung:

$$\boxed{1 \,\big|\, z_{N-2} \;\; \cdots \;\; z_0} \;\hat{=}\; -\left(1 + \sum_{i=0}^{N-2} (1 - z_i)\, 2^i\right)$$

eindeutig bestimmte Darstellung der Null: $0 = 0000_2$

asymmetrischer Zahlenbereich:

$$z_{\min} \leq -2^{N-1} \leq z \leq 2^{N-1} - 1 = z_{\max}$$

Grundsätzlich keine Subtraktion nötig: a-b=a+(-b)

Addition direkt auf negative Zahlen im Zweierkomplement erweiterbar:

Beispiel: $3 - 3 = 3 + (-3)$ im 4-Bit-Zweierkomplement lautet:

$$
\begin{array}{r}
\boxed{0 \,|\, 0\;1\;1} \\
+\boxed{1 \,|\, 1\;0\;1} \\
\hline
\boxed{0 \,|\, 0\;0\;0}
\end{array}
$$

Beispiel: $N = 3$

-1	1 1 1
-2	1 1 0
-3	1 0 1
-4	1 0 0
3	0 1 1
2	0 1 0
1	0 0 1
0	0 0 0