COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Lineare Gleichungssysteme, Teil 1

10. Vorlesung

11.1.19

Werkzeugkiste

Definitionen und Berechnungsmethoden zu Kondition und Stabilität

Komplexität und Effizienz

Aufwand: maximale Anzahl dominanter Operationen (worst-case).
Beispiel.
Landau-Symbole und Grenzwerte. Beispiel.

Definition:
Komplexität eines Problems. Effizienz eines Algorithmus.

$$f(n) = O(g(n)) \text{ für } n \to \infty \quad \Longleftarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x = b$$

Matrix-Vektor-Produkt:

Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$, Vektor $x = (x_i)_{i=1} \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \;, \qquad (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Matrix-Vektor-Produkt:

Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$, Vektor $x = (x_i)_{i=1} \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \,, \qquad (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

Matrixprodukt:

Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$AB = ((AB)_{ij})_{ij=1}^n \,, \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,, \quad x \neq 0\,,$$

andernfalls singulär.

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\ , \quad x \neq 0\ ,$$

andernfalls singulär.

Ist A regulär, so gilt $\det(A) \neq 0$ und es existiert eine eindeutig bestimmte Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I\ ,$$

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \, , \quad x \neq 0 \, ,$$

andernfalls singulär.

Ist A regulär, so gilt $\det(A) \neq 0$ und es existiert eine eindeutig bestimmte Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \, ,$$

und das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = A^{-1}b$.

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Ganz dumme Idee zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Aufwand der naiven Berechnung: $\mathcal{O}(n!)$

Ganz dumme Idee zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Aufwand der naiven Berechnung: $\mathcal{O}(n!)$

Genauere Analyse ergibt Instabilität des Algorithmus!

Ganz dumme Idee zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Aufwand der naiven Berechnung: $\mathcal{O}(n!)$

Genauere Analyse ergibt Instabilität des Algorithmus!

In der numerische Mathematik vermeidet man die Berechnung der Inversen, wo immer es geht! Wenn es notwendig ist, dann niemals die obige naive Berechnungsmethode verwenden.

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Aufwand und mögliche Aufwandsreduktion (Effizienz)

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x = b$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x \quad = \quad b$$

erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 * 1.\ \text{Zeile} \\ -3 * 1.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 * 1.\ \text{Zeile} \\ -3 * 1.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 * 2.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x = z$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x \quad = \quad z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -31/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L \qquad R \qquad = \qquad A$$

LR–Zerlegung

Der 1. Eliminationsschritt

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Der 1. Eliminationsschritt

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Berechnung von $(A^{(0)}|b^{(0)}) \to (A^{(1)}|b^{(1)})$:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}\,, \qquad b_1^{(1)} = b_1\,,$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \ell_{i1} a_{1j}\,, \qquad b_i^{(1)} = b_i - \ell_{i1} b_1\,, \qquad \ell_{i1} := \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,,$$

$$
\begin{array}{l}
\text{for } k = 1 : n-1 \text{ do} \\
\{ \\
\qquad \text{for} \quad i = k+1 : n \text{ do} \quad (\text{falls } a_{kk}^{(k-1)} \neq 0!) \\
\qquad\qquad \{ \\
\qquad\qquad\quad \ell_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \; ; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \ell_{ik} b_k^{(k-1)} \; ; \quad a_{ik}^{(k)} = 0 \; ; \\
\qquad\qquad\quad \text{for } j = k+1 : n \text{ do} \\
\qquad\qquad\quad \{ \\
\qquad\qquad\qquad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} \; ; \\
\qquad\qquad\quad \} \\
\qquad\qquad \} \\
\}
\end{array}
$$

Rückwärtssubstitution

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\
0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}
$$

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Algorithmus (Rückwärtssubstitution)

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}^{(n-1)}} b_n^{(n-1)}$$

for $i = n-1 : (-1) : 1$ do

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(n-1)}} \left(b_i^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j \right)$$

Memo: Summenformeln

$$\sum_{k=m+1}^{n} 1 = n - m$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1]$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (2+n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2+n-k)(n-k)$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (2+n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2+n-k)(n-k) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (2+j)j = 2\sum_{j=1}^{n-1} j + \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = n(n-1) + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)
\end{aligned}
$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+ \sum_{j=k+1}^{n} 1] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (2+n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2+n-k)(n-k) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (2+j)j = 2\sum_{j=1}^{n-1} j + \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = n(n-1) + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\
&= n(n-1)\left(\frac{1}{3}n + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)
\end{aligned}
$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Aufwand der Rücksubstitution:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}(n^2+n)$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$

$= \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Aufwand der Rücksubstitution:

$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}(n^2+n)$

Gesamtaufwand: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Definition: Auf der Menge V seien

- Addition $a + b : V \times V \to V$
- Multiplikation mit Skalaren $\alpha a : \mathbb{R} \times V \to V$

erklärt und haben folgende Eigenschaften:

- V ist Abelsche Gruppe (Assoziativität, Nullelement, negatives Element, Kommutativität)
- Addition und Multiplikation sind verträglich, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$ gilt
  - $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ (Assoziativität)
  - $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$ (Distributivität)
  - $1 \cdot a = a$ (Einselement)

Dann heißt V linearer Raum (Vektorraum) über $\mathbb{R}$.

Definition:
Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|: \ V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x\| \geq 0 \ , \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ , \tag{1}$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \ \|x\| \qquad \text{(Homogenität)} \ , \tag{2}$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \ . \tag{3}$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

Beispiele: Vektornormen

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$
- p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$
- p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad , \quad 1 \le p < \infty$
- Maximumsnorm (∞–Norm): $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$