COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Lineare Gleichungssysteme, Teil 2

11. Vorlesung

18.1.19

Problem:

Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Bisher:

- Gaußscher Algorithmus und LR-Zerlegung
- Aufwand des Gaußschen Algorithmus

Problem:

Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Bisher:

- Gaußscher Algorithmus und LR-Zerlegung
- Aufwand des Gaußschen Algorithmus

Ziele:

- Konditionsanalyse dieses Problems
- Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

Satz:

Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,, \quad x \neq 0\,,$$

andernfalls singulär.

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \,, \quad x \neq 0 \,,$$

andernfalls singulär.

Ist A regulär, so gilt $\det(A) \neq 0$ und es existiert eine eindeutig bestimmte Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \,,$$

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \quad x \neq 0 \ ,$$

andernfalls singulär.

Ist A regulär, so gilt $\det(A) \neq 0$ und es existiert eine eindeutig bestimmte Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \ ,$$

und das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = A^{-1}b$.

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Aufwand und mögliche Aufwandsreduktion (Effizienz)

Definition: Auf der Menge V seien

- Addition $a + b : V \times V \to V$
- Multiplikation mit Skalaren $\alpha a : \mathbb{R} \times V \to V$

erklärt und haben folgende Eigenschaften:

- V ist Abelsche Gruppe (Assoziativität, Nullelement, negatives Element, Kommutativität)
- Addition und Multiplikation sind verträglich, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$ gilt
  - $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ (Assoziativität)
  - $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$ (Distributivität)
  - $1 \cdot a = a$ (Einselement)

Dann heißt V linearer Raum (Vektorraum) über $\mathbb{R}$.

Definition:

Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \; V \to \mathbb{R}$$

heißt **Norm**, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x\| \geq 0 \,, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,, \tag{1}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\| \qquad \text{(Homogenität)} \,, \tag{2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \,. \tag{3}$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum**.

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

Beispiele: Vektornormen

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$
- p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$
- p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$
- Maximumsnorm (∞–Norm): $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in V = \mathbb{R}^{n,n}$, Matrizen mit n Zeilen und n Spalten

Jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$
(interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$)

Matrixnorm

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in V = \mathbb{R}^{n,n}$, Matrizen mit n Zeilen und n Spalten

Jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$
(interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$)

Verträglichkeit der Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ mit
Matrix–Vektor–Multiplikation:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$$

$\|A\|_M$ ist eine obere Schranke für die Längenänderung.

Definition:
Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} , \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n} ,$$

die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Definition:
Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ , \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\ ,$$

die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Bemerkung: Für zugehörige Matrixnormen gilt

- $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm.
- $\|Ax\| \leq \|A\|_M\ \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M\ \|B\|_M \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}, \qquad$ (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Bemerkung:

Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die zugehörige Matrixnorm.

Dann existiert ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^*\| = 1$ und $\|Ax^*\| = \|A\|_M$.

Bemerkung:
Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die zugehörige Matrixnorm.

Dann existiert ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^*\| = 1$ und $\|Ax^*\| = \|A\|_M$.

Satz:
Die Matrixnorm lässt sich wie folgt berechnen:

$$\|A\|_M = \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Satz (Zeilensummennorm):
Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, , \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} \, ,$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Satz (Zeilensummennorm):
Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;, \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} \;,$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \|A\|_\infty = 7$$

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Lösungsoperator: $f(A, b) = A^{-1}b$ nicht explizit gegeben

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Lösungsoperator: $f(A, b) = A^{-1}b$ nicht explizit gegeben

Eingabefehler:

- $b - \tilde{b}$ gemessen in Vektornorm
- $A - \tilde{A}$ gemessen in zugehöriger Matrixnorm

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Lösungsoperator: $f(A, b) = A^{-1}b$ nicht explizit gegeben

Eingabefehler:

- $b - \tilde{b}$ gemessen in Vektornorm
- $A - \tilde{A}$ gemessen in zugehöriger Matrixnorm

Ausgabefehler:

- $x - \tilde{x} = A^{-1}b - \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$ gemessen in Vektornorm

Fehlermaß

normweiser absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\| \ , \qquad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:
$x = (0.5, 123)^T, \ \ \tilde{x} = (1, 100)^T \ ,$
$\|x - \tilde{x}\|_\infty = \max\{0.5, \ 23\} = 23$

normweiser absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\| , \qquad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:
$x = (0.5, 123)^T, \;\; \tilde{x} = (1, 100)^T$,
$\|x - \tilde{x}\|_\infty = \max\{0.5,\; 23\} = 23$

normweiser relativer Fehler:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} , \qquad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n , \quad x \neq 0$$

Beispiel:
$x = (0.5, 123)^T, \;\; \tilde{x} = (1, 100)^T$, $\quad \frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\max\{0.5,\, 23\}}{123} \approx 0.186.$

Definition:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine reguläre Matrix. Dann heißt

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Kondition von A. Ist A singulär, so wird $\kappa(A) = \infty$ gesetzt.

Definition:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine reguläre Matrix. Dann heißt

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Kondition von A. Ist A singulär, so wird $\kappa(A) = \infty$ gesetzt.

Bemerkung: Es gilt

- $\kappa(A) \geq 1$ und $\kappa(I) = 1$
- $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$

Satz:
Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit beliebigem $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \, \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \; .$$

Es existieren rechte Seiten b, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweisidee

Mit $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ und

$$\|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$$

ergibt sich

Mit $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ und

$$\|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|A^{-1}\|\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \\
&\leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \\
&\leq \kappa(A)\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}
\end{aligned}$$

Satz:
Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ (kleine Störungen). Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\, \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|)\ .$$

Es existieren Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Numerisches Beispiel: Störung von A

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von A

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$,
$\kappa(A) = 2570$, $\frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} = 1.43 \cdot 10^{-4}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$,
$\kappa(A) = 2570$, $\frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} = 1.43 \cdot 10^{-4}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Relativer Fehler:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{2}{10} \leq \kappa(A)\frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} = 2570 \cdot 1.43 \cdot 10^{-4} = 0.3672$$

Satz:
Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|) .$$

Es existieren rechte Seiten b, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizientenmatrizen A, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Teilmenge der singulären Matrizen:

$\mathcal{S} := \{M \subset \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singulär}\}$

relativer Abstand von $A \neq 0$ zu $\mathcal{S}$:

$\operatorname{dist}(A, \mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \,\middle|\, B \in \mathcal{S} \right\}$

Teilmenge der singulären Matrizen:

$\mathcal{S} := \{M \subset \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singulär}\}$

relativer Abstand von $A \neq 0$ zu $\mathcal{S}$:

$\operatorname{dist}(A,\mathcal{S}) := \inf\left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \,\middle|\, B \in \mathcal{S} \right\}$

Satz:

Für alle regulären Matrizen A gilt

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{S}) \geq \frac{1}{\kappa(A)} \ .$$

Die Kondition als Quantifizierung der Regularität

Teilmenge der singulären Matrizen:
$\mathcal{S} := \{M \subset \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singulär}\}$

relativer Abstand von $A \neq 0$ zu $\mathcal{S}$:
$\mathrm{dist}(A, \mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \,\middle|\, B \in \mathcal{S} \right\}$

Satz:
Für alle regulären Matrizen A gilt

$$\mathrm{dist}(A, \mathcal{S}) \geq \frac{1}{\kappa(A)} \ .$$

Folgerung:
A fast singulär, d.h. $\mathrm{dist}(A, \mathcal{S})$ klein $\quad \Longrightarrow \quad \kappa(A)$ groß!

Ausblick: Problem und Algorithmus

Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

$$\boxed{\text{Auswertung von } f(A,b) = A^{-1}b \text{ zu Eingabe-Daten } A,\ b}$$

Satz: Relative Kondition des Problems $\kappa_{\mathrm{rel}} = \kappa(A)$

Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

$$\boxed{\text{Auswertung von } f(A,b) = A^{-1}b \text{ zu Eingabe-Daten } A,\ b}$$

Satz: Relative Kondition des Problems $\kappa_{\mathrm{rel}} = \kappa(A)$

Algorithmus:

Zerlegung des Lösungsoperators in Elementaroperationen

$$x = A^{-1}b = g_m \circ \cdots \circ g_1(A, b)$$

Qualitätskriterien: Aufwand und Stabilität