COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Lineare Gleichungssysteme, Teil 3

12. Vorlesung

25.01.19

Problem:

Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Schritte:

- Teil 1: Der Gaußsche Algorithmus, Aufwandsabschätzung
- Teil 2: Konditionsanalyse dieses Problems
- Teil 3: Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

Der 1. Eliminationsschritt

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Berechnung von $(A^{(0)}|b^{(0)}) \rightarrow (A^{(1)}|b^{(1)})$:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}\,, \qquad b_1^{(1)} = b_1\,,$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \ell_{i1} a_{1j}\,, \qquad b_i^{(1)} = b_i - \ell_{i1} b_1\,, \qquad \ell_{i1} := \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,,$$

for $k = 1 : n-1$ do

{

for $i = k+1 : n$ do (falls $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0!$)

{

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \; ; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \ell_{ik} b_k^{(k-1)} \; ; \quad a_{ik}^{(k)} = 0 \; ;$$

for $j = k+1 : n$ do

{

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} \; ;$$

}

}

}

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Rückwärtssubstitution

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Algorithmus (Rückwärtssubstitution)

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}^{(n-1)}} b_n^{(n-1)}$$

for $i = n-1 : (-1) : 1$ do

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(n-1)}} \left(b_i^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L \qquad R \qquad = \qquad A$$

LR–Zerlegung

Eliminationsmatrizen

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ell_{k+1,k} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Eliminationsmatrizen

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ell_{k+1,k} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Lemma: Mit $A^{(0)} = A$ und $b^{(0)} = b$ gilt

$$A^{(k)} = (I - G_k)A^{(k-1)}, \quad b^{(k)} = (I - G_k)b^{(k-1)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1 .$$

Beweis

Beweis. Ausrechnen liefert mit der Definition von G_k

$$\left(G_k A^{(k-1)}\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (G_k)_{il} \left(A^{(k-1)}\right)_{lj}$$
$$= (G_k)_{ik} \left(A^{(k-1)}\right)_{kj}$$
$$= \begin{cases} 0 & i \leq k \ , \ j = 1, \ldots, n \\ \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} & i \geq k+1 \ , \ j = 1, \ldots, n \end{cases} .$$

Also ist

$$\left((I - G_k)A^{(k-1)}\right)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)} & i \leq k \ , \ j = 1, \ldots, n \\ a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} & i \geq k+1 \ , \ j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Satz: Ist der Gaußsche Algorithmus für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ durchführbar (d.h. erhält man Pivotelemente $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$) und ergeben sich dabei die Eliminationsmatrizen $G_1, \ldots, G_{n-1}$, so gilt

$$A = LR \quad \text{mit} \quad L = I + \sum_{k=1}^{n-1} G_k \,, \quad R = \prod_{k=1}^{n-1} (I - G_{n-k}) A$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Satz: Ist der Gaußsche Algorithmus für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ durchführbar (d.h. erhält man Pivotelemente $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$) und ergeben sich dabei die Eliminationsmatrizen $G_1, \ldots, G_{n-1}$, so gilt

$$\kappa(I - G_k) = \|I - G_k\|_\infty \|(I - G_k)^{-1}\|_\infty = \max_{i=k+1,\ldots,n} (1 + |\ell_{ik}|)^2,$$

mit

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

Wir haben:

$$G_k G_k = 0,$$

und deshalb

$$(I + G_k)(I - G_k) = I - G_k G_k = I.$$

Beweisidee:

Wir haben:

$$G_k G_k = 0,$$

und deshalb

$$(I + G_k)(I - G_k) = I - G_k G_k = I.$$

Somit

$$(I - G_k)^{-1} = I + G_k.$$

Beweisidee:

Wir haben:

$$G_k G_k = 0,$$

und deshalb

$$(I + G_k)(I - G_k) = I - G_k G_k = I.$$

Somit

$$(I - G_k)^{-1} = I + G_k.$$

Zusätzlich:

$$\|I \pm G_k\|_\infty = \max_{i=k+1,\dots,n} (1 + |\ell_{ik}|)$$

$$A^{(k)} = (I - G_k)A^{(k-1)}, \qquad \tilde{A}^{(k)} = \mathrm{rd}\Big((I - G_k)\tilde{A}^{(k-1)}\Big)$$

$$b^{(k)} = (I - G_k)b^{(k-1)}, \qquad \tilde{b}^{(k)} = \mathrm{rd}\Big((I - G_k)\tilde{b}^{(k-1)}\Big)$$

til Rückwärtssubstitution ($R = A^{(n-1)}$ und $\tilde{R} = \tilde{A}^{(n-1)}$)

$$x = R^{-1}b^{(n-1)}, \qquad \tilde{x} = \mathrm{rd}\Big(\tilde{R}^{-1}\tilde{b}^{(n-1)}\Big)$$

Dabei ist die Rundung komponentenweise zu verstehen!!

Für jede Matrix B gilt:

$$\frac{\|B - \mathrm{rd}(B)\|_\infty}{\|B\|_\infty} \leq \mathrm{eps},$$

denn für jeden nicht verschwindenden Eintrag der Matrix gilt

$$\frac{|B_{ij} - \mathrm{rd}(B_{ij})|}{|B_{ij}|} \leq \mathrm{eps},$$

so dass

$$\|B - \mathrm{rd}(B)\|_\infty = \max_i \sum_j |B_{ij} - \mathrm{rd}(B_{ij})| \leq \max_i \sum_j |B_{ij}| \mathrm{eps}.$$

Satz:
Die sich aus dem Gaußsche Algorithmus ergebende Lösung $\tilde{x} = \tilde{R}^{-1}\tilde{z}$ mit $\tilde{z} = \tilde{b}^{(n-1)}$ hat, falls $\tilde{R}$ regulär ist, gegenüber der wahren Lösung $x = R^{-1}z$ mit $z = b^{(n-1)}$ den Fehler

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \kappa(R)\left(\frac{\|R-\tilde{R}\|_\infty}{\|R\|_\infty} + \frac{\|z-\tilde{z}\|_\infty}{\|z\|_\infty}\right) + o(\|R-\tilde{R}\|_\infty)$$

mit

$$\kappa(R) \le \kappa(A)\prod_{k=1}^{n-1}\kappa_k$$

mit

$$\kappa_k = \max_{i=k+1,\dots,n}(1+|\ell_{ik}|)^2.$$

Stabilitätsindikator der Elimination

Mit $A^{(0)} = A$, $R = A^{(n-1)}$ und $\tilde{R} = \tilde{A}^{(n-1)}$

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= g_k(A^{(k-1)}) = (I - G_k)A^{(k-1)}, \\ \tilde{A}^{(k)} &= \tilde{g}_k(\tilde{A}^{(k-1)}) = \mathrm{rd}\Big((I - G_k)\tilde{A}^{(k-1)}\Big) \end{aligned}$$

Mit $A^{(0)} = A$, $R = A^{(n-1)}$ und $\tilde{R} = \tilde{A}^{(n-1)}$

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= g_k(A^{(k-1)}) = (I - G_k)A^{(k-1)}, \\ \tilde{A}^{(k)} &= \tilde{g}_k(\tilde{A}^{(k-1)}) = \mathrm{rd}\Big((I - G_k)\tilde{A}^{(k-1)}\Big) \end{aligned}$$

Stabilitätsabschätzung (siehe 8. Vorlesung):

$$\frac{\|R - \tilde{R}\|_\infty}{\|R\|_\infty} \leq \sigma_{n-1}\|\varepsilon\|_\infty + o(\|\varepsilon\|_\infty) \leq \sigma_R \mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}),$$

Mit $A^{(0)} = A$, $R = A^{(n-1)}$ und $\tilde{R} = \tilde{A}^{(n-1)}$

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= g_k(A^{(k-1)}) = (I - G_k)A^{(k-1)}, \\ \tilde{A}^{(k)} &= \tilde{g}_k(\tilde{A}^{(k-1)}) = \mathrm{rd}\Big((I - G_k)\tilde{A}^{(k-1)}\Big) \end{aligned}$$

Stabilitätsabschätzung (siehe 8. Vorlesung):

$$\frac{\|R - \tilde{R}\|_\infty}{\|R\|_\infty} \leq \sigma_{n-1}\|\varepsilon\|_\infty + o(\|\varepsilon\|_\infty) \leq \sigma_R \mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}),$$

wobei wegen $\kappa_k = \kappa(g_k) = \kappa(I - G_k)$ und

$$\begin{aligned} \sigma_k &\leq 1 + \kappa_k \sigma_{k-1} \\ \sigma_{n-1} &\leq 1 + \kappa_{n-1}(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots + \kappa_2(1 + \kappa_1))\ldots). \end{aligned}$$

Satz:
Die sich aus dem Gaußsche Algorithmus ergebende Lösung $\tilde{x} = \tilde{R}^{-1}\tilde{z}$ mit $\tilde{z} = \tilde{b}^{(n-1)}$ hat, falls $\tilde{R}$ regulär ist, gegenüber der wahren Lösung $x = R^{-1}z$ mit $z = b^{(n-1)}$ den Fehler

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 2\kappa(R)\sigma_{n-1}\cdot \mathrm{eps} + o(\mathrm{eps})$$

mit

$$\kappa(R) \leq \kappa(A)\prod_{k=1}^{n-1}\kappa_k, \quad \kappa_k = \max_{i=k+1,\dots,n}(1+|\ell_{ik}|)^2.$$

und

$$\sigma_{n-1} = 1 + \kappa_{n-1}(1+\kappa_{n-1}(1+\ldots+\kappa_2(1+\kappa_1))\ldots).$$

Der Stabilitätsindikator wird nur dann groß, wenn für mindestens einen der Eliminationsfaktoren gilt:

$$|\ell_{ik}| = |\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}| \gg 1.$$

Um das zu vermeiden macht man Spaltenpivoting:

Man tauscht in $A^{(k-1)}$ die Zeile mit dem größten führenden Eintrag in die oberste Position. Danach gilt dann garantiert

$$|\ell_{ik}| = |\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}| \leq 1.$$

Stabilitätsindikator bei Spaltenpivoting

Spaltenpivoting:

$$|\ell_{ik}| = |\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}| \leq 1.$$

Dann

$$\kappa_k = \max_{i=k+1,\dots,n} (1 + |\ell_{ik}|)^2 \leq 4$$

Spaltenpivoting:

$$|\ell_{ik}| = |\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}| \leq 1.$$

Dann

$$\kappa_k = \max_{i=k+1,\dots,n} (1 + |\ell_{ik}|)^2 \leq 4$$

und in Folge:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \kappa_k &\leq 4^{n-1} \\ \sigma_{n-1} &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^{n-1} \kappa_k \leq 4^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

Satz: Für den Gaußschen Algorithmus mit Spaltenpivoting gilt

$$|\ell_{ik}| = \left|\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right| \leq 1,$$

und daher ergibt sich für den Stabilitätsindikator

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 4^n \kappa(A)(4^{n-1} - 1)\mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}).$$

Für große Matrizen A kann der Gaußsche Algorithmus also selbst mit Spaltenpivoting numerisch instabil sein.