COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Computer-orientierte Mathematik

2. Vorlesung - Johannes Zonker

02.11.18

Positionssysteme:
Definition und Beispiele.
Dezimal- und Dualdarstellung natürlicher Zahlen.
Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Ganze Zahlen:
Erweiterung der Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.
Dualdarstellung mit Vorzeichenbit.
Darstellung negativer ganzer Zahlen im Rechner: Zweierkomplement.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

anschaulich:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\; b \neq 0 \right\}$$

Bruchrechenregeln:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} , \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} .$$

mathematisch präzise:

Konstruktion von $\mathbb{Q}$ durch Abschluß von $\mathbb{Z}$ unter Division:
Äquivalenzklassen von Paaren (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Satz:
Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine von $\mathbb{Q}$.

Ziffernmenge: $\mathcal{Z} \cup \{-\} \cup \{/\}$

Satz:
Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine von $\mathbb{Q}$.

Ziffernmenge: $\mathcal{Z} \cup \{-\} \cup \{/\}$

Folgerung: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Darstellung von $\mathbb{Q}$

Satz:
Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine von $\mathbb{Q}$.

Ziffernmenge: $\mathcal{Z} \cup \{-\} \cup \{/\}$

Folgerung: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beispiele: Dezimalsystem, Dualsystem

Dreiecksschema:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \rightarrow & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & & & & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & & & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & \\
\frac{6}{1} & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$z_n \cdots z_0,\ z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i\, q^i\,, \quad z_i \in 0, \ldots, q-1,\ n, m \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

$q = 10$: Dezimalbrüche, $q = 2$: Dualbrüche

Satz: Jeder Dualbruch ist ein Dezimalbruch, nicht umgekehrt.

Satz: Jeder q-adische Bruch ist eine rationale Zahl, nicht umgekehrt.

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3):

$0,123123123... = 0,\overline{123}$

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3):

$0,123123123... = 0,\overline{123}$

geometrische Reihe: $q > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{-(m+1)}}{1-q^{-1}} = \frac{1}{1-q^{-1}}$$

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3):
$0,123123123... = 0,\overline{123}$

geometrische Reihe: $q > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{-(m+1)}}{1-q^{-1}} = \frac{1}{1-q^{-1}}$$

Satz:
Jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl und umgekehrt.

Bemerkung: Darstellung durch periodische Dezimalbrüche nicht eindeutig!

anschaulich:
unendliche Dezimalbrüche (oder q-adische Brüche):

$$\mathbb{R} = \{z_n \cdots z_0, z_{-1}z_{-2}\cdots \mid z_i = 0, \ldots, 9\}$$

mathematisch präzise:

- Konstruktion von $\mathbb{R}$ durch Vervollständigung von $\mathbb{Q}$: Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$.
- Dedekindsche Schnitte: Menge von Paaren von Teilmengen von $\mathbb{Q}$

Erinnerung:

- Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Erinnerung:

- Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Erinnerung:

- Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Folgerung: Es gibt keine Zifferndarstellung von $\mathbb{R}$

Es reicht, eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ zu finden, die nicht abzählbar ist. Wähle $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

Sei M abzählbar, also $M = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots\}$. Schreibe jedes Element $x_n \in M$ als unendlichen Dezimalbruch, also z.B. $0,\overline{9}$ statt 1. Das ergibt

$$\begin{array}{ccl} x_0 & = & 0, z_{00}\ z_{01}\ z_{02} \dots \\ x_1 & = & 0, z_{10}\ z_{11}\ z_{12} \dots \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \\ x_n & = & 0, z_{n0}\ z_{n1}\ z_{n2} \dots \\ \vdots & & \qquad \vdots \end{array}$$

Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \{1, \dots, 8\}$ mit $a_n \neq z_{nn}$ und setze $a = 0, a_1 a_2 \dots$. Dann ist $a \in M$, also $a = x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch, denn $a_n \neq z_{nn}$ für alle n.

Zentrale Einsicht

Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

Absoluter und Relativer Fehler

absoluter Fehler: $|x - \tilde{x}|$.

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$: $|x - \tilde{x}| = 1$

Absoluter und Relativer Fehler

absoluter Fehler: $|x - \tilde{x}|.$

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$: $|x - \tilde{x}| = 1$

relativer Fehler: $\frac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$, $x \neq 0.$

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$ $|x - \tilde{x}|/|x| = 10^{-3}$

Festkommazahlen

$$z_{n-1}\, z_{n-2} \cdots z_0 , z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i\, q^i , \qquad z_i \in \{0, \ldots , q-1\} \; .$$

$\ell = m + n$ Stellen verfügbar; $\quad n,\ m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

$$z_{n-1}\, z_{n-2} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i\, q^i, \qquad z_i \in \{0, \ldots, q-1\}\ .$$

$\ell = m + n$ Stellen verfügbar; $\quad n,\ m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Beispiel: $q = 10,\ \ell = 4,\ n = 3,\ m = 1$

- $x = 0,123$, Runden: $\tilde{x} = 0,1$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0.2$
- $x = 123$, exakt darstellbar: $\tilde{x} = 123$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

$$z_{n-1}\, z_{n-2} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i\, q^i, \qquad z_i \in \{0, \dots, q-1\}\ .$$

$\ell = m + n$ Stellen verfügbar; $\quad n,\ m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Beispiel: $q = 10,\ \ell = 4,\ n = 3,\ m = 1$

- $x = 0,123$, Runden: $\tilde{x} = 0,1$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0.2$
- $x = 123$, exakt darstellbar: $\tilde{x} = 123$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Folgerung:
Im Sinne einer optimalen Stellenausnutzung $n,\ m$ variabel halten!

Definition: (Gleitkommazahlen) Jede in der Form

$$\tilde{x} = (-1)^s a \cdot q^e \tag{1}$$

mit Vorzeichenbit $s \in \{0, 1\}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ und *Mantisse*

$$a = 0, a_1 \cdots a_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \, q^{-i} \,, \qquad a_i \in \{0, \ldots, q-1\} \,,\; a_1 \neq 0 \,,$$

oder $a = 0$ darstellbare Zahl $\tilde{x}$ heißt Gleitkommazahl mit *Mantissenlänge* $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$.

Die Menge all dieser Zahlen heißt $\mathbb{G}(q, \ell)$.

Die Darstellung (1) heißt normalisierte Gleitkommadarstellung.

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123,456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123,456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$
- $x = 0,00123456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^{-2}$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$