

# COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I



Christof Schütte

Wintersemester 2018/19

## Computer-orientierte Mathematik

### 3. Vorlesung - Christof Schuette

9.11.18

## Rationale Zahlen:

Rationale Zahlen als Brüche ganzer Zahlen.

$q$ -adische Brüche, periodische  $q$ -adische Brüche. Beispiele.

Satz: Jede rationale Zahl ist als periodischer  $q$ -adischer Bruch darstellbar.

Keine Eindeutigkeit! Beispiele.

Praktische Realisierung:

Dynamische Ziffernzahl. Aufwand pro Addition problemabhängig.

## Reelle Zahlen:

Reelle Zahlen als unendliche  $q$ -adische Brüche.

Abzählbarkeit und Zifferndarstellung.

Satz:  $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar.

Folgerung: Es gibt keine Zifferndarstellung von  $\mathbb{R}$ .

Konsequenz: Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

**Definition:** (Gleitkommazahlen) Jede in der Form

$$\tilde{x} = (-1)^s a \cdot q^e \quad (1)$$

mit Vorzeichenbit  $s \in \{0, 1\}$ , Exponent  $e \in \mathbb{Z}$  und *Mantisse*

$$a = 0, a_1 \cdots a_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} a_i q^{-i}, \quad a_i \in \{0, \dots, q-1\}, \quad a_1 \neq 0,$$

oder  $a = 0$  darstellbare Zahl  $\tilde{x}$  heißt **Gleitkommazahl** mit *Mantissenlänge*  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \geq 1$ .

Die Menge all dieser Zahlen heißt  $\mathbb{G}(q, \ell)$ .

Die Darstellung (1) heißt **normalisierte Gleitkommadarstellung**.

normalisierte Darstellung: einer reellen Zahl  $0 < x \in \mathbb{R}$ :

$$x = a^* q^e, \quad e \in \mathbb{Z}, \quad q^{-1} \leq a^* < 1$$

normalisierte Darstellung: einer reellen Zahl  $0 < x \in \mathbb{R}$ :

$$x = a^* q^e, \quad e \in \mathbb{Z}, \quad q^{-1} \leq a^* < 1$$

unendlicher  $q$ -adischer Bruch: (Achtung: Eindeutigkeit)

$$a^* = 0, a_1 a_2 \cdots a_l a_{l+1} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i q^{-i}, \quad a_i \in \{0, \dots, q-1\}$$

normalisierte Darstellung: einer reellen Zahl  $0 < x \in \mathbb{R}$ :

$$x = a^* q^e, \quad e \in \mathbb{Z}, \quad q^{-1} \leq a^* < 1$$

unendlicher  $q$ -adischer Bruch: (Achtung: Eindeutigkeit)

$$a^* = 0, a_1 a_2 \cdots a_\ell a_{\ell+1} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i q^{-i}, \quad a_i \in \{0, \dots, q-1\}$$

**Runden:**  $\tilde{x} = \text{rd}(x) := a q^e$

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} a_i q^{-i} + \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{\ell+1} < \frac{1}{2}q \\ q^{-\ell} & \text{falls } a_{\ell+1} \geq \frac{1}{2}q \end{cases}$$

**Satz:** Zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $x \in \mathbb{R}$ , so daß

$$|x - \text{rd}(x)| \geq q^N .$$

Beweis:

Die Behauptung folgt durch Wahl von

$$x = 0, z_1 \cdots z_\ell z_{\ell+1} \cdot q^{\ell+1+N}$$

mit  $z_1, z_{\ell+1} \neq 0$  und beliebigem  $N \in \mathbb{N}$ .

Der absolute Rundungsfehler kann beliebig groß werden.

**Satz:** Es sei  $q$  eine gerade Zahl. Dann gilt

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2}q^{-(\ell-1)} =: \text{eps}(q, \ell) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Die Zahl  $\text{eps}(q, \ell)$  heißt **Maschinengenauigkeit**.

**Satz:** Es sei  $q$  eine gerade Zahl. Dann gilt

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2}q^{-(\ell-1)} =: \text{eps}(q, \ell) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Die Zahl  $\text{eps}(q, \ell)$  heißt **Maschinengenauigkeit**.

Beweis: O.B.d.A.:  $x > 0$ . **Annahme:**  $a_{\ell+1} > q/2$

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_\ell a_{\ell+1} \dots \cdot q^e, \quad a_1 \neq 0$$

**Satz:** Es sei  $q$  eine gerade Zahl. Dann gilt

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2} q^{-(\ell-1)} =: \text{eps}(q, \ell) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Die Zahl  $\text{eps}(q, \ell)$  heißt **Maschinengenauigkeit**.

Beweis: O.B.d.A.:  $x > 0$ . **Annahme:**  $a_{\ell+1} > q/2$

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_\ell a_{\ell+1} \dots \cdot q^e, \quad a_1 \neq 0$$

$$\text{rd}(x) = (0, a_1 a_2 \cdots a_\ell + \delta) \cdot q^e$$

$$\delta = q^{-\ell}$$

**Satz:** Es sei  $q$  eine gerade Zahl. Dann gilt

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2}q^{-(\ell-1)} =: \text{eps}(q, \ell) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Die Zahl  $\text{eps}(q, \ell)$  heißt **Maschinengenauigkeit**.

Beweis: O.B.d.A.:  $x > 0$ . **Annahme:**  $a_{\ell+1} > q/2$

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_\ell a_{\ell+1} \dots \cdot q^e, \quad a_1 \neq 0$$

$$\text{rd}(x) = (0, a_1 a_2 \cdots a_\ell + \delta) \cdot q^e$$

$$\delta = q^{-\ell}$$

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{(\delta - a_{\ell+1}q^{-(\ell+1)}) \cdot q^e}{q^{-1} \cdot q^e} \leq \frac{\delta - \frac{1}{2}q \cdot q^{-(\ell+1)}}{q^{-1}} = \frac{1}{2}q \cdot q^{-\ell}$$

Der relative Rundungsfehler ist durch  $\text{eps}(q, \ell)$  beschränkt.

endlicher Exponenten-Bereich:

$$e \in [e_{\min}, e_{\max}] \cap \mathbb{Z}$$

endlicher Zahlen-Bereich:

$$x_{\min} := q^{e_{\min}-1} \leq |\tilde{x}| \leq (1 - q^{-\ell})q^{e_{\max}} =: x_{\max}$$

- ▶  $x < x_{\min}$ : underflow oder  $x = 0$
- ▶  $x > x_{\max}$ : overflow oder  $x = NaN$

	Float	Double
Länge in Bits	32	64
Exponent		
Bits	8	11
$e_{\min}$	-126	-1022
$e_{\max}$	128	1024
Mantisse		
Bits	23	52
normalisierte Gleitkommazahl		
$x_{\min}$	$1,2 \cdot 10^{-38}$	$2,2 \cdot 10^{-308}$
$x_{\max}$	$3,4 \cdot 10^{+38}$	$1,8 \cdot 10^{+308}$
Maschinengenauigkeit $\epsilon_{ps}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-16}$

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \text{eps}(q, \ell)$$

Menge aller Approximationen  $\tilde{x}$  auf  $\ell$  gültige Stellen im  $q$ -System:

$$\text{rd}(x) \in B(x, \text{eps}(q, \ell)) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R} \mid \tilde{x} = x(1 + \varepsilon), |\varepsilon| \leq \text{eps}(q, \ell)\},$$

Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , die auf  $\tilde{x} = \text{rd}(x) \in \mathbb{G}(q, \ell)$  gerundet werden:

Äquivalenzrelation:

$$x \equiv y \quad \Leftrightarrow \quad \text{rd}(x) = \text{rd}(y)$$

Äquivalenzklassen

$$[\tilde{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{x} = \text{rd}(x)\} .$$

Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , die auf  $\tilde{x} = \text{rd}(x) \in \mathbb{G}(q, \ell)$  gerundet werden:

Äquivalenzrelation:

$$x \equiv y \Leftrightarrow \text{rd}(x) = \text{rd}(y)$$

Äquivalenzklassen

$$[\tilde{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{x} = \text{rd}(x)\} .$$

**Satz:** Es sei

$$\tilde{x} = aq^e \in \mathbb{G}(q, \ell), \quad q^{-1} \leq a < 1 .$$

Dann gilt  $[\tilde{x}] = [\tilde{x} - q^{e-1}\text{eps}, \tilde{x} + q^{e-1}\text{eps})$

Grundrechenarten führen aus  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(q, \ell)$  heraus:

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{G} \not\Rightarrow \tilde{x} + \tilde{y} \in \mathbb{G}, \quad \text{analog: } -, \cdot, /$$

Grundrechenarten führen aus  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(q, \ell)$  heraus:

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{G} \not\Rightarrow \tilde{x} + \tilde{y} \in \mathbb{G}, \quad \text{analog: } -, \cdot, /$$

Gleitkommaarithmetik:

$$\tilde{x} \tilde{+} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} + \tilde{y}),$$

$$\tilde{x} \tilde{-} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} - \tilde{y}),$$

$$\tilde{x} \tilde{*} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} \tilde{y}),$$

$$\tilde{x} \tilde{:} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} : \tilde{y}), \quad \tilde{y} \neq 0$$

Grundrechenarten führen aus  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(q, \ell)$  heraus:

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{G} \not\Rightarrow \tilde{x} + \tilde{y} \in \mathbb{G}, \quad \text{analog: } -, \cdot, /$$

Gleitkommaarithmetik:

$$\tilde{x} \tilde{+} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} + \tilde{y}),$$

$$\tilde{x} \tilde{-} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} - \tilde{y}),$$

$$\tilde{x} \tilde{*} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} \tilde{y}),$$

$$\tilde{x} \tilde{:} \tilde{y} = \text{rd}(\tilde{x} : \tilde{y}), \quad \tilde{y} \neq 0$$

Die Gleitkommazahlen mit Gleitkommaarithmetik sind kein Körper.

Übliche Umformungen sind nicht mehr äquivalent.

Beispiel: binomische Formel

$$(a + b)^2 \neq a^2 + 2ab + b^2$$

sogar

$$(a^2 + 2ab + b^2) + b^2 \neq a^2 + (2ab + b^2)$$

## Bemerkung:

Die Abfrage `if  $\tilde{x} == \tilde{y}$`  ist sinnlos!

$$\tilde{x} = \tilde{y} \not\Rightarrow x = y, \quad \tilde{x} = \text{rd}(x), \tilde{y} = \text{rd}(y)$$

## Bemerkung:

Die Abfrage `if  $\tilde{x} == \tilde{y}$`  ist sinnlos!

$$\tilde{x} = \tilde{y} \not\Rightarrow x = y, \quad \tilde{x} = \text{rd}(x), \tilde{y} = \text{rd}(y)$$

umgekehrt:  $x = y \implies \text{rd}(x) = \text{rd}(y)$  aber

$$x = a + b, y = x \not\Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{x} = \text{rd}(a) \tilde{+} \text{rd}(b)$$

### Bemerkung:

Die Abfrage `if  $\tilde{x} == \tilde{y}$`  ist sinnlos!

$$\tilde{x} = \tilde{y} \not\Rightarrow x = y, \quad \tilde{x} = \text{rd}(x), \tilde{y} = \text{rd}(y)$$

umgekehrt:  $x = y \implies \text{rd}(x) = \text{rd}(y)$  aber

$$x = a + b, y = x \not\Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{x} = \text{rd}(a) \tilde{+} \text{rd}(b)$$

**Gleichheits-Abfragen von Gleitkomma-Zahlen vermeiden!**

Berechne das Polynom  $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$   
mit  $a = 4\,999\,999$  an der Stelle  $x_0 = 10\,000\,000$ .

»  $a = 4999999;$

»  $x = 10000000;$

»  $f = x^3 + 12 * a^2 * x - 6 * a * x^2 - 8 * a^3$

f =

393216

Berechne das Polynom  $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$   
mit  $a = 4\,999\,999$  an der Stelle  $x_0 = 10\,000\,000$ .

```
» a = 4999999;
```

```
» x = 10000000;
```

```
» f = x^3 + 12 * a^2 * x - 6 * a * x^2 - 8 * a^3
```

```
f =
```

```
393216
```

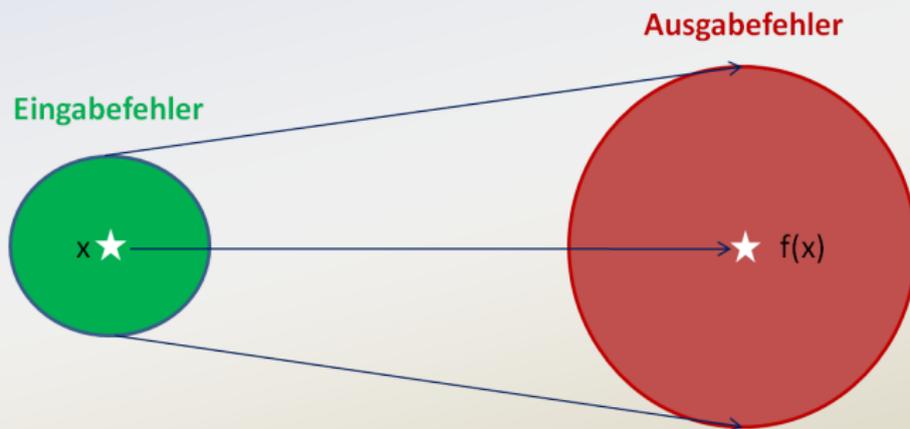
```
» f = (x - 2 * a)^3
```

```
f =
```

```
8
```

Was ist hier schief gelaufen?

## Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



Gegeben:  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \neq 0$ .

Approximationen mit relativem Fehler  $\varepsilon$ :

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1 + \varepsilon_y), \quad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

Gegeben:  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \neq 0$ .

Approximationen mit relativem Fehler  $\varepsilon$ :

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1 + \varepsilon_y), \quad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

**Satz:** Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Gegeben:  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \neq 0$ .

Approximationen mit relativem Fehler  $\varepsilon$ :

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1 + \varepsilon_y), \quad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

**Satz:** Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Dominierender Fehleranteil:  $2\varepsilon$

Gegeben:  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \neq 0$ .

Approximationen mit relativem Fehler  $\varepsilon$ :

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1 + \varepsilon_y), \quad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

**Satz:** Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Dominierender Fehleranteil:  $2\varepsilon$

Die relative Kondition ist der Verstärkungsfaktor  $\kappa$  von  $\varepsilon$ :  $\kappa = 2$

Gegeben:  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \neq 0$ .

Approximationen mit relativem Fehler  $\varepsilon$ :

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1 + \varepsilon_y), \quad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

**Satz:** Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Dominierender Fehleranteil:  $2\varepsilon$

Die relative Kondition ist der Verstärkungsfaktor  $\kappa$  von  $\varepsilon$ :  $\kappa = 2$

Vernachlässigung des Terms höherer Ordnung  $\varepsilon^2$

## Definition (Landau-Symbol $o$ )

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I = (-a, a)$  eine Funktion. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \iff f(\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad (\text{für } \varepsilon \rightarrow 0).$$

## Definition (Landau-Symbol $o$ )

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I = (-a, a)$  eine Funktion. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \iff f(\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad (\text{für } \varepsilon \rightarrow 0).$$

Beispiele:

$$\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$$

## Definition (Landau-Symbol $o$ )

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I = (-a, a)$  eine Funktion. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \iff f(\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad (\text{für } \varepsilon \rightarrow 0).$$

## Beispiele:

$$\varepsilon^2 = o(\varepsilon) \quad \varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon \sum_{i=1}^{28} (\sin(\varepsilon))^i = o(\varepsilon), \quad \dots$$