COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Computer-orientierte Mathematik

4. Vorlesung - Christof Schuette

16.11.18

Runden und Rundungsfehler:

Der absolute Rundungsfehler ist nicht gleichmäßig beschränkt.

Der relative Rundungsfehler ist gleichmäßig beschränkt.

Obere Schranke: Maschinengenauigkeit $eps = eps(q, \ell)$.

Runden und Rundungsfehler:

Der absolute Rundungsfehler ist nicht gleichmäßig beschränkt.

Der relative Rundungsfehler ist gleichmäßig beschränkt.

Obere Schranke: Maschinengenauigkeit $eps = eps(q, \ell)$.

Zahlenmengen statt Zahlen:

Menge aller Approximationen von $x \in \mathbb{R}$ auf ℓ gültige Stellen im q-System.

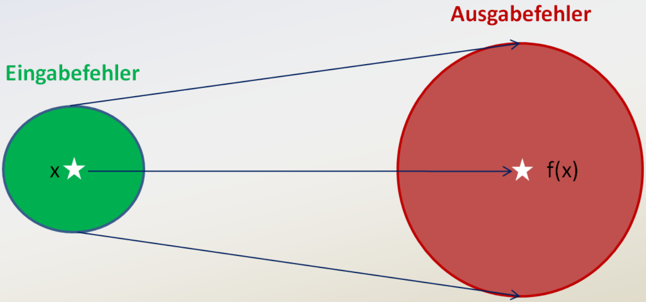
Menge aller reellen Zahlen, die auf $\tilde{x} \in \mathbb{G}(q, \ell)$ gerundet werden.

Runden und Rundungsfehler:
Der absolute Rundungsfehler ist nicht gleichmäßig beschränkt.
Der relative Rundungsfehler ist gleichmäßig beschränkt.
Obere Schranke: Maschinengenauigkeit $eps = eps(q, \ell)$.

Zahlenmengen statt Zahlen:
Menge aller Approximationen von $x \in \mathbb{R}$ auf ℓ gültige Stellen im q-System.
Menge aller reellen Zahlen, die auf $\tilde{x} \in \mathbb{G}(q, \ell)$ gerundet werden.

Algebraische Eigenschaften:
Gleitkommaarithmetik, Verlust von Assoziativität, Distributivität, Invertierbarkeit.
Folgerung: Übliche Umformungen sind nicht mehr äquivalent.

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



Relative Kondition der Multiplikation

Gegeben: $x, y \in \mathbb{R}$, $x,\ y \neq 0$.
Approximationen mit relativem Fehler ε:

$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1+\varepsilon_y), \qquad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

Relative Kondition der Multiplikation

Gegeben: $x, y \in \mathbb{R}$, $x,\ y \neq 0$.
Approximationen mit relativem Fehler ε:

$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1+\varepsilon_y), \qquad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

Satz: Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\,\varepsilon + \varepsilon^2 \,.$$

Gegeben: $x, y \in \mathbb{R}$, $x,\ y \neq 0$.

Approximationen mit relativem Fehler ε:

$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1+\varepsilon_y), \qquad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

Satz: Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\,\varepsilon + \varepsilon^2\ .$$

Dominierender Fehleranteil: 2ε

Relative Kondition der Multiplikation

Gegeben: $x, y \in \mathbb{R}$, $x,\ y \neq 0$.
Approximationen mit relativem Fehler ε:

$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1+\varepsilon_y), \qquad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

Satz: Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\,\varepsilon + \varepsilon^2 \,.$$

Dominierender Fehleranteil: 2ε
Die relative Kondition ist der Verstärkungsfaktor κ von ε: $\kappa = 2$

Gegeben: $x, y \in \mathbb{R}$, $x,\ y \neq 0$.

Approximationen mit relativem Fehler ε:

$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x), \quad \tilde{y} = y(1+\varepsilon_y), \qquad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

Satz: Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\,\varepsilon + \varepsilon^2 \,.$$

Dominierender Fehleranteil: 2ε

Die relative Kondition ist der Verstärkungsfaktor κ von ε: $\kappa = 2$

Vernachlässigung des *Terms höherer Ordnung* ε^2

Definition (Landau-Symbol o)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ eine Funktion. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0)\ .$$

Definition (Landau-Symbol o)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ eine Funktion. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0)\ .$$

Beispiele:

$\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$

Definition (Landau-Symbol o)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ eine Funktion. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0) \,.$$

Beispiele:

$$\varepsilon^2 = o(\varepsilon) \qquad \varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon \sum_{i=1}^{28} (\sin(\varepsilon))^i = o(\varepsilon), \qquad \ldots$$

Definition (Landau-Symbol o)
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ Funktionen und $g(\varepsilon) \neq 0$ für $\varepsilon \neq 0$. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0) \, .$$

Definition (Landau-Symbol o)
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ Funktionen und $g(\varepsilon) \neq 0$ für $\varepsilon \neq 0$. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0)\ .$$

Beispiele: $\quad (\alpha, a \neq 0)$

$\varepsilon^3 = o(\varepsilon^2)$

Landau-Symbol o - Verallgemeinerung

Definition (Landau-Symbol o)
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ Funktionen und $g(\varepsilon) \neq 0$ für $\varepsilon \neq 0$. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0)\ .$$

Beispiele: $(\alpha, a \neq 0)$

$$\varepsilon^3 = o(\varepsilon^2)$$

$$f(\varepsilon) = o(\alpha g(\varepsilon)) = o(g(\varepsilon))$$

Definition (Landau-Symbol o)
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ Funktionen und $g(\varepsilon) \neq 0$ für $\varepsilon \neq 0$. Wir verabreden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0)\ .$$

Beispiele: $\quad (\alpha, a \neq 0)$

$\varepsilon^3 = o(\varepsilon^2)$

$f(\varepsilon) = o(\alpha g(\varepsilon)) = o(g(\varepsilon))$

Zusätzliche Schreibweise: $o(\alpha\varepsilon + o(\varepsilon)) = o(\alpha\varepsilon) = o(\varepsilon)$

Satz: (Division)
Es gilt

$$\frac{|(x/y) - (\tilde{x}/\tilde{y})|}{|x/y|} \leq 2\,\varepsilon + o(\varepsilon)\ .$$

relative Kondition der Division: $\kappa = 2$.

Satz: (Division)
Es gilt

$$\frac{|(x/y) - (\tilde{x}/\tilde{y})|}{|x/y|} \leq 2\,\varepsilon + o(\varepsilon)\ .$$

relative Kondition der Division: $\kappa = 2$.

Satz: (Addition)
Es sei $x, y > 0$. Dann gilt

$$\frac{|(x+y) - (\tilde{x}+\tilde{y})|}{|x+y|} \leq 1\varepsilon\ .$$

relative Kondition der Addition: $\kappa = 1$.

Relative Kondition der Subtraktion

Satz: (Subtraktion)
Es sei $x, y > 0$. Dann gilt

$$\frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x-y|} \leq \left(\frac{|x|+|y|}{|x-y|}\right)\varepsilon\,.$$

Relative Kondition der Subtraktion

Satz: (Subtraktion)
Es sei $x, y > 0$. Dann gilt

$$\frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x-y|} \le \left(\frac{|x|+|y|}{|x-y|}\right)\varepsilon\,.$$

relative Kondition der Subtraktion: $\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|}$

Satz: (Subtraktion)
Es sei $x, y > 0$. Dann gilt

$$\frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x-y|} \leq \left(\frac{|x|+|y|}{|x-y|}\right) \varepsilon \,.$$

relative Kondition der Subtraktion: $\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|}$

Auslöschung: Ist $x \approx y$, so wird $\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|}$ beliebig groß!!!

```
» format long;
» x = double(pi)
x = 3.14159265358979
» y=double(pi+1e-14)
y = 3.14159265358980
» y-x
ans = 1.021405182655144e-14
```

» format long;
» x = double(pi)
x = 3.14159265358979
» y=double(pi+1e-14)
y = 3.14159265358980
» y-x
ans = 1.021405182655144e-14

Nebenrechnung:
$\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|} \approx 6.28e+14$

Matlab – Beispiel

» format long;
» x = double(pi)
x = 3.14159265358979
» y=double(pi+1e-14)
y = 3.14159265358980
» y-x
ans = 1.021405182655144e-14

Nebenrechnung:

$$\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|} \approx 6.28e{+}14$$

$$\frac{|y-\tilde{y}|}{|y|} \leq \textit{eps} \approx 2.22e\text{-}16$$

```
» format long;
» x = double(pi)
x = 3.14159265358979
» y=double(pi+1e-14)
y = 3.14159265358980
» y-x
ans = 1.021405182655144e-14
```

Nebenrechnung:

$$\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|} \approx 6.28\text{e}{+}14$$

$$\frac{|y-\tilde{y}|}{|y|} \leq eps \approx 2.22\text{e-}16$$

$$0.021 \approx \frac{|(y-x)-(\tilde{y}-\tilde{x})|}{|y-x|} \leq \kappa \cdot \frac{|y-\tilde{y}|}{|y|} \leq 6.28\text{e}{+}14 \times 2.22\text{e-}16 = 0.14$$

Nieder mit der Auslöschung

Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden!

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$

Problem: $(*)$

$$\boxed{\text{Auswertung von } f \text{ an der Stelle } x_0}$$

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$

Problem: $(*)$

$$\boxed{\text{Auswertung von } f \text{ an der Stelle } x_0}$$

Definition (Absolute Kondition)
Die absolute Kondition κ_{abs} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \,.$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{abs} vor, so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

Absolute Kondition und Ableitung

Satz:
Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\mathrm{abs}} = |f'(x_0)|$.

Beispiel:
Sei $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\kappa_{\mathrm{abs}} = |f'(x_0)| = 2|x_0|$.

Nach Definition der Ableitung gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(x_0)$$

oder gleichbedeutend

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x) - f'(x_0)(x_0 - x)}{x_0 - x} = 0\ .$$

Daraus erhält man unmittelbar

$$f(x_0) - f(x) = f'(x_0)(x_0 - x) + o(x_0 - x)\ .$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten den Betrag und verwendet die Rechenregel $|a + o(\varepsilon)| = |a| + o(\varepsilon)$, so folgt die Behauptung.

Definition:
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, falls

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in I \ .$$

Definition:
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, falls

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in I \ .$$

Beispiel: $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

Definition:
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, falls

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \qquad \forall x, y \in I \ .$$

Beispiel: $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

Satz:
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so genügt die absolute Kondition κ_{abs} von $(*)$ der Abschätzung

$$\kappa_{\text{abs}} \le L \ .$$

Satz:

Geschachtelte Funktionsauswertung: $f(x) = g \circ h(x) = g(h(x))$.

$\kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)$: abs. Kondition der Auswertung von h an der Stelle x_0.

$\kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)$: abs. Kondition der Auswertung von g in $y_0 = h(x_0)$.

Dann gilt

$$\kappa_{\mathrm{abs}} \leq \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)\, \kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)\ .$$

Ist h differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in y_0, so liegt Gleichheit vor.

Satz:
Geschachtelte Funktionsauswertung: $f(x) = g \circ h(x) = g(h(x))$.

$\kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)$: abs. Kondition der Auswertung von h an der Stelle x_0.

$\kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)$: abs. Kondition der Auswertung von g in $y_0 = h(x_0)$.

Dann gilt

$$\kappa_{\mathrm{abs}} \leq \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)\, \kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)\ .$$

Ist h differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in y_0, so liegt Gleichheit vor.

Beispiel:
$f(x) = |\sin(x)| = g(h(x)),\ g(y) = |y|,\ \ h(x) = \sin(x), \qquad x_0 = 0$
$\kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0) = 1, \quad \kappa_{\mathrm{abs}}(g, \sin(x_0)) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \kappa_{\mathrm{abs}} \leq 1$

Beweis

$$f(x) = g(h(x))$$

Nach Definition gilt

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)|h(x_0) - h(x)| + o(h(x_0) - h(x))$$

$$f(x) = g(h(x))$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &\leq \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)|h(x_0) - h(x)| + o(h(x_0) - h(x)) \\
&\leq \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)\kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)|x_0 - x| \\
&\qquad + \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)o(x_0 - x) + \\
&\qquad + o\left(\kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)|x_0 - x| + o(x_0 - x)\right)
\end{aligned}$$

Beweis

$$f(x) = g(h(x))$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &\leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)|h(x_0) - h(x)| + o(h(x_0) - h(x)) \\
&\leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)\kappa_{\text{abs}}(h, x_0)|x_0 - x| \\
&\qquad + \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)o(x_0 - x) + \\
&\qquad + o\left(\kappa_{\text{abs}}(h, x_0)|x_0 - x| + o(x_0 - x)\right) \\
&= \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)\kappa_{\text{abs}}(h, x_0)|x_0 - x| + o(x_0 - x)\ .
\end{aligned}$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$ und der Kettenregel.

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $\quad 0 \neq x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$

Problem: $(*)$

Auswertung von f an der Stelle x_0

Definition (Relative Kondition)
Die relative Kondition κ_{rel} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|) \, .$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{rel} vor, so wird $\kappa_{\mathrm{rel}} = \infty$ gesetzt.