COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Computer-orientierte Mathematik

6. Vorlesung - Christof Schuette

30.11.18

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate. Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung). Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Relative Kondition der Grundrechenarten:

Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate. Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung). Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:

Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \; .$$

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.
Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung). Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:
Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \ .$$

Sätze zur absoluten Kondition:
Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\mathrm{abs}} = |f'(x_0)|$.
Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt $\kappa_{\mathrm{abs}} \leq L$.
Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt
$\kappa_{\mathrm{abs}} \leq \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)\ \kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)$.

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $\quad 0 \neq x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$

Problem: $(*)$

Auswertung von f an der Stelle x_0

Definition (Relative Kondition)
Die relative Kondition κ_{rel} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|) \; .$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{rel} vor, so wird $\kappa_{\mathrm{rel}} = \infty$ gesetzt.

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

Satz:
Es gilt

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{\mathrm{abs}}$$

Merksatz

Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

» a = 4999999;
» x = 10000000;
» $f = x^3 + 12 * a^2 * x - 6 * a * x^2 - 8 * a^3$

f =
393216

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

» a = 4999999;
» x = 10000000;
» $f = x^3 + 12 * a^2 * x - 6 * a * x^2 - 8 * a^3$

f =
393216

» $f = (x - 2 * a)^3$
f =
8

Was ist hier schief gelaufen?

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f_g(x) = ax + b = g_2 \circ g_1(x)\,, \qquad g_1(y) = ay\,, \quad g_2(y) = y + b$$

$$f_h(x) = ax+b = a(x+\frac{b}{a}) = h_2 \circ h_1(x)\,, \qquad h_1(y) = y+\frac{b}{a}\,, \quad h_2(y) = ay$$

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f_g(x) = ax + b = g_2 \circ g_1(x)\ , \qquad g_1(y) = ay\ , \quad g_2(y) = y + b$$

$$f_h(x) = ax+b = a(x+\frac{b}{a}) = h_2 \circ h_1(x)\ , \qquad h_1(y) = y+\frac{b}{a}\ , \quad h_2(y) = ay$$

Welcher Algorithmus ist besser?

Welcher Algorithmus ist besser?

Beispiel:

$$f_g(x) = ax + b = g_2 \circ g_1(x)\ , \qquad g_1(y) = ay\ , \quad g_2(y) = y + b$$

$$f_h(x) = ax + b = a(x + \frac{b}{a}) = h_2 \circ h_1(x)\ , \qquad h_1(y) = y + \frac{b}{a}\ , \quad h_2(y) = ay$$

Rundungsfehler:

$$\tilde{g}_i(y) = \mathrm{rd}\,(g_i(y)) = g_i(y)(1+\varepsilon_i), \quad \tilde{h}_i(y) = \mathrm{rd}\,(h_i(y)) = h_i(y)(1+\delta_i),$$

mit $|\delta_i|, |\varepsilon_i| \leq eps$ ergeben:

Welcher Algorithmus ist besser?

Beispiel:

$$f_g(x) = ax + b = g_2 \circ g_1(x) \,, \qquad g_1(y) = ay \,, \quad g_2(y) = y + b$$

$$f_h(x) = ax + b = a(x + \frac{b}{a}) = h_2 \circ h_1(x) \,, \qquad h_1(y) = y + \frac{b}{a} \,, \quad h_2(y) = ay$$

Rundungsfehler:

$$\tilde{g}_i(y) = \mathrm{rd}\,(g_i(y)) = g_i(y)(1+\varepsilon_i), \quad \tilde{h}_i(y) = \mathrm{rd}\,(h_i(y)) = h_i(y)(1+\delta_i),$$

mit $|\delta_i|, |\varepsilon_i| \leq eps$ ergeben:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_g(\varepsilon, x) &= (ax(1+\varepsilon_1) + b)\,(1+\varepsilon_2) \\ \tilde{f}_h(\delta, x) &= (ax + b)(1+\delta_1)(1+\delta_2). \end{aligned}$$

Welcher Algorithmus ist besser?

Abschätzen von

$$\tilde{f}_g(\varepsilon, x) \quad = \quad (ax(1+\varepsilon_1)+b)\,(1+\varepsilon_2)$$

liefert:

$$\frac{|f(x_0)-\tilde{f}_g(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \quad = \quad \frac{|ax_0\varepsilon_1 + (ax_0+b)\varepsilon_2|}{|ax_0+b|} + o(\|\varepsilon\|)$$

Welcher Algorithmus ist besser?

Abschätzen von

$$\tilde{f}_g(\varepsilon, x) \quad = \quad (ax(1+\varepsilon_1)+b)\,(1+\varepsilon_2)$$

liefert:

$$\begin{aligned}\frac{|f(x_0)-\tilde{f}_g(\varepsilon,x_0)|}{|f(x_0)|} \quad &= \quad \frac{|ax_0\varepsilon_1+(ax_0+b)\varepsilon_2|}{|ax_0+b|}+o(\|\varepsilon\|)\\ &\leq \quad \left[\frac{|ax_0|}{|ax_0+b|}+1\right]\cdot\|\varepsilon\|+o(\|\varepsilon\|)\end{aligned}$$

mit $\|\varepsilon\| = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$.

Welcher Algorithmus ist besser?

Abschätzen von

$$\tilde{f}_g(\varepsilon, x) \quad = \quad (ax(1+\varepsilon_1)+b)\,(1+\varepsilon_2)$$

liefert:

$$\begin{aligned}\frac{|f(x_0)-\tilde{f}_g(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \quad &= \quad \frac{|ax_0\varepsilon_1 + (ax_0+b)\varepsilon_2|}{|ax_0+b|} + o(\|\varepsilon\|) \\ &\leq \quad \left[\frac{|ax_0|}{|ax_0+b|} + 1\right] \cdot \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)\end{aligned}$$

mit $\|\varepsilon\| = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$.

Linearer Verstärkungsfaktor:

$$\sigma_g = \left[\frac{|ax_0|}{|ax_0+b|} + 1\right]$$

Abschätzen von

$$\tilde{f}_h(\delta, x) \quad = \quad (ax + b)(1 + \delta_1)(1 + \delta_2).$$

liefert:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_0) - \tilde{f}_h(\delta, x_0)|}{|f(x_0)|} \quad &= \quad |1 - (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)| = |\delta_1 + \delta_2| + o(\|\delta\|) \\ &\leq \quad {\color{red}2} \cdot \|\delta\| + o(\|\delta\|) \end{aligned}$$

mit $\|\delta\| = \max\{|\delta_1|, |\delta_2|\}$.

Linearer Verstärkungsfaktor:

$${\color{red}\sigma_h = 2}$$

Vergleich der Verstärkungsfaktoren des Rundungsfehlers:

$$\sigma_g = \left[\frac{|ax_0|}{|ax_0 + b|} + 1\right], \qquad \sigma_h = 2.$$

Bei Auslöschung ($ax_0 \approx -b$) wird σ_g sehr viel größer als σ_h.

$\rightsquigarrow$ f_g ist instabiler als f_h.

Merksätze

Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

Verschiedene Algorithmen führen zu verschiedenen Approximationen

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

gerundete elementare Funktionen $\tilde{g}_i(y) = (1 + \varepsilon_i) g_i(y)$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

gerundete elementare Funktionen $\tilde{g}_i(y) = (1 + \varepsilon_i) g_i(y)$

relative Rundungsfehler:

$$\frac{|g_i(y) - \tilde{g}_i(y)|}{|g_i(y)|} = |\varepsilon_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |\varepsilon_i| =: \|\varepsilon\| \leq eps \,, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

gerundete elementare Funktionen $\tilde{g}_i(y) = (1 + \varepsilon_i) g_i(y)$

relative Rundungsfehler:

$$\frac{|g_i(y) - \tilde{g}_i(y)|}{|g_i(y)|} = |\varepsilon_i| \le \max_{i=1,\dots,n} |\varepsilon_i| =: \|\varepsilon\| \le eps \,, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

Auswirkung auf das Ergebnis: Auswertungsfehler

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|}$$

Wir wollen Störungen durch Rundungsfehler abschätzen. Dabei:

$$\|\varepsilon\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\varepsilon_i| \,, \qquad \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \,.$$

Definition:

Es sei $f(x_0) \neq 0$. Dann ist die relative Stabilität σ von $f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$ gegenüber Rundungsfehlern

$$\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i), \quad |\varepsilon_i| \leq eps,$$

die kleinste Zahl σ mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma\|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|) \,.$$

Liegt dies für keine reelle Zahl σ vor, so wird $\sigma = \infty$ gesetzt.

Gesamtfehler

Eingabefehler: $\dfrac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$

max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\dfrac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Eingabefehler: $\dfrac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$

max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\dfrac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Satz: Es sei $x_0 \neq 0$ und $f(x_0) \neq 0$.
Dann genügt der Gesamtfehler der Abschätzung

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) .$$

Dabei bezeichnet $\sigma(\tilde{x}_0)$ die Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle $\tilde{x}_0$.

Unter Verwendung der Definitionen von relativer Kondition und Stabilität berechnet man

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + \frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$$

Unter Verwendung der Definitionen von relativer Kondition und Stabilität berechnet man

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} &\leq \frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + \frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \\
&\leq \frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + \frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|} \, \frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Definitionen von relativer Kondition und Stabilität berechnet man

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} &\leq \frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + \frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \\
&\leq \frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + \frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|} \frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \\
&\leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| \left(1 + \frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}\right) \\
&\quad + o(|x_0 - \tilde{x}_0|) + o(\|\varepsilon\|)
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Definitionen von relativer Kondition und Stabilität berechnet man

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(x_0)-\tilde{f}(\varepsilon,\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} &\le \frac{|f(x_0)-f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + \frac{|f(\tilde{x}_0)-\tilde{f}(\varepsilon,\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \\
&\le \frac{|f(x_0)-f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + \frac{|f(\tilde{x}_0)-\tilde{f}(\varepsilon,\tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|}\,\frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \\
&\le \kappa_{\mathrm{rel}}\frac{|x_0-\tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\|\left(1+\frac{|f(x_0)-f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}\right) \\
&\quad + o(|x_0-\tilde{x}_0|) + o(\|\varepsilon\|) \\
&\le \kappa_{\mathrm{rel}}\frac{|x_0-\tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| + o(|x_0-\tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|)\,.
\end{aligned}
$$

Definitionen von Stabilität:

$$\frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|} \leq \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Definitionen von Stabilität:

$$\frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|} \leq \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Also:

$$\frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|} \frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| \frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + o(\|\varepsilon\|)$$

Definitionen von Stabilität:

$$\frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|} \leq \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Also:

$$\frac{|f(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(\tilde{x}_0)|} \frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| \frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} + o(\|\varepsilon\|)$$

Und:

$$\frac{|f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{|f(x_0) + f(\tilde{x}_0) - f(x_0)|}{|f(x_0)|} \leq 1 + \frac{|f(\tilde{x}_0) - f(x_0)|}{|f(x_0)|}$$

Faustregel

$$\text{Gesamtfehler} = \kappa * \text{Eingabefehler} + \sigma * \text{Auswertungsfehler!}$$

Satz: Es sei $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h.

Satz: Es sei $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h.

Bezeichne $*$ eine der Elementaroperationen $* = +, -, \cdot, /$ und die sei die zugehörige relative Kondition der Elementaroperation mit κ_* bezeichnet.

Satz: Es sei $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h.

Bezeichne $*$ eine der Elementaroperationen $* = +, -, \cdot, /$ und die sei die zugehörige relative Kondition der Elementaroperation mit κ_* bezeichnet.

Dann gilt für die relative Stabilität σ_f der Auswertung $f(x_0) = g(x_0) * h(x_0)$:

$$\sigma_f \leq 1 + \kappa_* \max\{\sigma_g, \sigma_h\}.$$

Es seien $h : I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$ und $g : I_g \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen und

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

ein Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$. Bezeichnet κ_g die Kondition der Auswertung von g an der Stelle $y = h(x_0)$ und σ_h die relative Stabilität des obigen Algorithmus für h, so gilt für die relative Stabilität σ von

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

die Abschätzung

$$\sigma \leq 1 + \kappa_g \sigma_h \; .$$