COMPUTERORIENTIERTE
MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Computer-orientierte Mathematik

7. Vorlesung - Christof Schuette

07.12.18

Kondition und Stabilität

Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

$$f(x_0)$$

Eingabefehler: $\frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$

$$\frac{|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + o(|x_0 - \tilde{x}_0|)$$

Die Stabilität ist eine Eigenschaft des Algorithmus!

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots g_1(x_0)$$

Auswertungsfehler: $\tilde{g}_i = (1 + \varepsilon_i) g_i$

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\mathrm{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Gesamtfehler

Eingabefehler: $\frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$

max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Gesamtfehler

Eingabefehler: $\dfrac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$

max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\dfrac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Satz: Es sei $x_0 \neq 0$ und $f(x_0) \neq 0$.
Dann genügt der Gesamtfehler der Abschätzung

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma(\tilde{x}_0)\|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) \ .$$

Dabei bezeichnet $\sigma(\tilde{x}_0)$ die Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle $\tilde{x}_0$.

$$\boxed{\text{Gesamtfehler} = \kappa * \text{Eingabefehler} + \sigma * \text{Auswertungsfehler!}}$$

Es seien $h : I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$ und $g : I_g \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen und

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

ein Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$. Bezeichnet κ_g die Kondition der Auswertung von g an der Stelle $y = h(x_0)$ und σ_h die relative Stabilität des obigen Algorithmus für h, so gilt für die relative Stabilität σ von

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

die Abschätzung

$$\sigma \leq 1 + \kappa_g \sigma_h \; .$$

Satz: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \;, \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

Satz: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0),\ h(x_0) > 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

$$f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

$$f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

$$f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

$$f(x_0) = g(x_0)/h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0),\ h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

Es seien $h : I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$ und $g : I_g \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen und

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

ein Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$. Bezeichnet κ_g die Kondition der Auswertung von g an der Stelle $y = h(x_0)$ und σ_h die Stabilität des obigen Algorithmus für h, so gilt für die Stabilität σ von

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

die Abschätzung

$$\sigma \leq 1 + \kappa_g \sigma_h \,.$$

Beispiel: $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos(x))}$

Stabilitätsanalyse: Modell des Rechenablaufs

Beispiel: $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos(x))}$

niedrige Auflösung: $f(x) = w_2 \circ w_1(x)$

$$w_2(y) = 1 + y, \; w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos(x))}$$

Beispiel: $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos(x))}$

niedrige Auflösung: $f(x) = w_2 \circ w_1(x)$

$w_2(y) = 1 + y,\ w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos(x))}$

höhere Auflösung $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

Beispiel: $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos(x))}$

niedrige Auflösung: $f(x) = w_2 \circ w_1(x)$

$w_2(y) = 1 + y,\ w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos(x))}$

höhere Auflösung $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \quad g_2(y) = \frac{1}{2}(1 - y)\ , \quad g_3(y) = 1 + \sqrt{y}$

noch höhere Auflösung $f(x_0) = h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(x_0)$

$h_1(x) = \cos(x),\ \ h_2(y) = 1 - y,\ \ h_3(y) = \frac{1}{2}y,\ \ h_4(y) = \sqrt{y},\ \ g_5(y) = 1 + y$

Festlegung der Auflösung: Modell des Rechenablaufs

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

» a = 4999999;
» x = 10000000;
» $f = x^3 + 12 * a^2 * x - 6 * a * x^2 - 8 * a^3$
f =
   393216

Kein Eingabefehler! Relativer Fehler: $= 49151 \approx 5 \cdot 10^4$

Grobe Stabilitätsabschätzung

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2 x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2 x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

Grobe Stabilitätsabschätzung

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\
&= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)
\end{aligned}
$$

Algorithmus 1: $f(x_0) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$

$$g_1(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 \;, \quad g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3$$

Grobe Stabilitätsabschätzung

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2 x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2 x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

Algorithmus 1: $f(x_0) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$

$$g_1(x_0) = x_0^3 + 12a^2 x_0 \,, \quad g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $(x_0 = 10^7,\ a = 5 \cdot 10^6 - 1)$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq 1 + \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \max\{\sigma_{g_1}, \sigma_{g_2}\}, \qquad \sigma_{g_1} = \sigma_{g_2} = 1 \\ &= 1 + \frac{|4\cdot 10^{21} - 12\cdot 10^{14} + 12\cdot 10^7| + |4\cdot 10^{21} - 12\cdot 10^{14} + 12\cdot 10^7 - 8|}{8} \\ &\leq 1 + 10^{21} - 3\cdot 10^{14} + 3\cdot 10^7 - 1 = 1 + (10^7 - 1)^3 \approx 10^{21} \end{aligned}$$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_1

$$g_1(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 = u_3(x_0) + u_2 \circ u_1(x_0)$$

$$u_3(x) = x^3, \quad u_2(y) = 12y, \quad u_1(x) = a^2x$$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_1

$$g_1(x_0) = x_0^3 + 12a^2 x_0 = u_3(x_0) + u_2 \circ u_1(x_0)$$

$$u_3(x) = x^3, \quad u_2(y) = 12y, \quad u_1(x) = a^2 x$$

induktive Berechnung von $\quad \sigma_{g_1} \leq 1 + \max\{\sigma_{u_3}, \sigma_{u_2 \circ u_1}\}$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_1

$$g_1(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 = u_3(x_0) + u_2 \circ u_1(x_0)$$

$$u_3(x) = x^3, \quad u_2(y) = 12y, \quad u_1(x) = a^2x$$

induktive Berechnung von $\sigma_{g_1} \leq 1 + \max\{\sigma_{u_3}, \sigma_{u_2 \circ u_1}\}$

Berechnung von $\sigma_{u_3} = 1$

$$g_1(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 = u_3(x_0) + u_2 \circ u_1(x_0)$$

$$u_3(x) = x^3, \quad u_2(y) = 12y, \quad u_1(x) = a^2x$$

induktive Berechnung von $\sigma_{g_1} \leq 1 + \max\{\sigma_{u_3}, \sigma_{u_2 \circ u_1}\}$

Berechnung von $\sigma_{u_3} = 1$

Berechnung von $\sigma_{u_2 \circ u_1} \leq 1 + \kappa_{u_2} = 1 + 2 = 3$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_1

$$g_1(x_0) = x_0^3 + 12a^2 x_0 = u_3(x_0) + u_2 \circ u_1(x_0)$$

$$u_3(x) = x^3, \quad u_2(y) = 12y, \quad u_1(x) = a^2 x$$

induktive Berechnung von $\sigma_{g_1} \leq 1 + \max\{\sigma_{u_3}, \sigma_{u_2 \circ u_1}\}$

Berechnung von $\sigma_{u_3} = 1$

Berechnung von $\sigma_{u_2 \circ u_1} \leq 1 + \kappa_{u_2} = 1 + 2 = 3$

Ergebnis: $\sigma_{g_1} \leq 1 + \max\{\sigma_{u_3}, \sigma_{u_2 \circ u_1}\} = 1 + \max\{1, 3\} = 4$

$$g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3 = v_4 \circ v_3 \circ v_2(x_0) + v_1(x_0)$$

$$v_4(y) = 6y, \quad v_3(y) = ay, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_1(x) = 8a^3$$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_2

$$g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3 = v_4 \circ v_3 \circ v_2(x_0) + v_1(x_0)$$

$$v_4(y) = 6y, \quad v_3(y) = ay, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_1(x) = 8a^3$$

induktive Berechnung von $\quad \sigma_{g_2} \leq 1 + \max\{\sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2}, \sigma_{v_1}\}$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_2

$$g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3 = v_4 \circ v_3 \circ v_2(x_0) + v_1(x_0)$$

$$v_4(y) = 6y, \quad v_3(y) = ay, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_1(x) = 8a^3$$

induktive Berechnung von $\quad \sigma_{g_2} \leq 1 + \max\{\sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2}, \sigma_{v_1}\}$

Berechnung von $\quad \sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2} \leq 1 + \kappa_{v_4}(1 + \kappa_{v_3}) = 1 + 2 \cdot (2 + 1) = 7$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_2

$$g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3 = v_4 \circ v_3 \circ v_2(x_0) + v_1(x_0)$$

$$v_4(y) = 6y, \quad v_3(y) = ay, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_1(x) = 8a^3$$

induktive Berechnung von $\quad \sigma_{g_2} \leq 1 + \max\{\sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2}, \sigma_{v_1}\}$

Berechnung von $\quad \sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2} \leq 1 + \kappa_{v_4}(1 + \kappa_{v_3}) = 1 + 2 \cdot (2 + 1) = 7$

Berechnung von $\quad \sigma_{v_1} = 1$

Höhere Auflösung: Zerlegung von g_2

$$g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3 = v_4 \circ v_3 \circ v_2(x_0) + v_1(x_0)$$

$$v_4(y) = 6y, \quad v_3(y) = ay, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_1(x) = 8a^3$$

induktive Berechnung von $\quad \sigma_{g_2} \leq 1 + \max\{\sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2}, \sigma_{v_1}\}$

Berechnung von $\quad \sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2} \leq 1 + \kappa_{v_4}(1 + \kappa_{v_3}) = 1 + 2 \cdot (2 + 1) = 7$

Berechnung von $\quad \sigma_{v_1} = 1$

Ergebnis: $\quad \sigma_{g_2} \leq 1 + \max\{\sigma_{v_4 \circ v_3 \circ v_2}, \sigma_{v_1}\} = 1 + \max\{7, 1\} = 8$

Feinere Stabilitätsabschätzung

Algorithmus 1B:

$f(x_0) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$

$$= (u_3(x_0) + u_2 \circ u_1(x_0)) - (v_4 \circ v_3 \circ v_2(x_0) + v_1(x_0))$$

$$u_3(x) = x^3, \quad u_2(y) = 12y, \quad u_1(x) = a^2 x$$

$$v_4(y) = 6y, \quad v_3(y) = ay, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_1(x) = 8a^3$$

Feinere Stabilitätsabschätzung

Algorithmus 1B:

$$f(x_0) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$= (u_3(x_0) + u_2 \circ u_1(x_0)) - (v_4 \circ v_3 \circ v_2(x_0) + v_1(x_0))$$

$$u_3(x) = x^3, \quad u_2(y) = 12y, \quad u_1(x) = a^2 x$$

$$v_4(y) = 6y, \quad v_3(y) = ay, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_1(x) = 8a^3$$

realistischere Stabilitätsschranke:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\leq 1 + \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \max\{\sigma_{g_1}, \sigma_{g_2}\}, \qquad \sigma_{g_1} \leq 4, \quad \sigma_{g_2} \leq 8 \\ &\leq 1 + 8 \frac{|4 \cdot 10^{21} - 12 \cdot 10^{14} + 12 \cdot 10^7| + |4 \cdot 10^{21} - 12 \cdot 10^{14} + 12 \cdot 10^7 - 8|}{8} \\ &= 1 + 8(10^{21} - 3 \cdot 10^{14} + 3 \cdot 10^7 - 1) \approx 8 \cdot 10^{21} \end{aligned}$$

Gesamtfehler

Relativer Gesamtfehler gemäß Stabilitätsabschätzung von Algorithmus 1B:

$$\leq \sigma_2 \cdot \mathrm{eps} \leq 8 \cdot 10^{21} \cdot 2.22 \cdot 10^{-16} \approx 18 \cdot 10^5$$

Relativer Gesamtfehler gemäß MATLAB:

$$\approx 5 \cdot 10^4$$

Stabilerer Algorithmus

Algorithmus 2:
$f(x_0) = g_2 \circ g_1(x_0) = (x - 2a)^3$,
$g_1(x) = x - g_0(a),\ g_0(a) = 2a,\ g_2(y) = y^3$

Algorithmus 2:
$f(x_0) = g_2 \circ g_1(x_0) = (x - 2a)^3$,
$g_1(x) = x - g_0(a),\;\; g_0(a) = 2a,\;\; g_2(y) = y^3$

Berechnung von $\quad \sigma_{g_1} \leq 1 + \frac{|x|+2|a|}{|x-2a|}\sigma_{g_0} \leq 1 + \frac{|x|+2|a|}{|x-2a|}$

Algorithmus 2:
$f(x_0) = g_2 \circ g_1(x_0) = (x - 2a)^3$,
$g_1(x) = x - g_0(a), \ g_0(a) = 2a, \ g_2(y) = y^3$

Berechnung von $\quad \sigma_{g_1} \le 1 + \frac{|x|+2|a|}{|x-2a|}\sigma_{g_0} \le 1 + \frac{|x|+2|a|}{|x-2a|}$

Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sigma_f &\le 1 + \kappa_{\mathrm{rel}}(g_2)\,\sigma_{g_1} = 1 + \underbrace{\frac{|g_2'(x-2a)||x-2a|}{|g_2(x-2a)|}}_{=3}\sigma_{g_1} \\
&\le 4 + 3\frac{|x| + 2|a|}{|x-2a|} \approx 3 \cdot 10^7
\end{aligned}$$

Relativer Gesamtfehler gemäß Stabilitätsabschätzung:

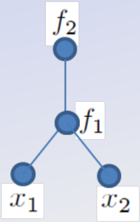
$$\le \sigma_f \cdot \mathrm{eps} \le 3 \cdot 10^7 \cdot 2.22 \cdot 10^{-16} \approx 7 \cdot 10^{-9}$$

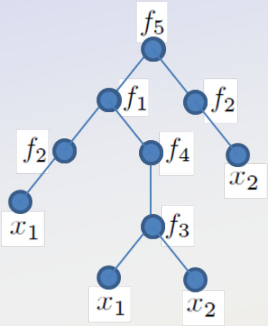
MERKSATZ:

Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!

Für $F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ betrachten wir die zwei Auswertungen

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2) &= f_2(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2 \\
F_2(x_1, x_2) &= f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big), \\
&\quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y
\end{aligned}
$$



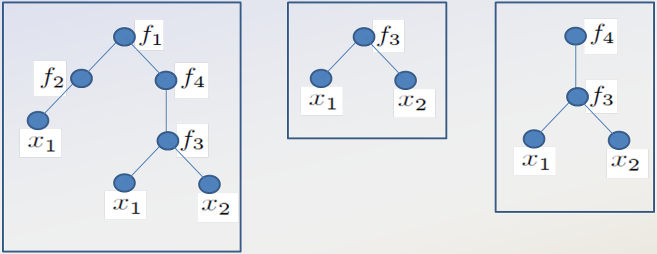


$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2$$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big),$$

$$f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Teilbäume



Wir bezeichnen einen Auswertungsbaum mit β bezeichnen und mit $\#\beta$ die Anzahl der Knoten in dem Baum β. Von seiner Wurzel aus gesehen, ist der Baum eindeutig dadurch gekennzeichnet, dass man die (Teil-)Bäume angibt, in die er nach Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten zerfällt:

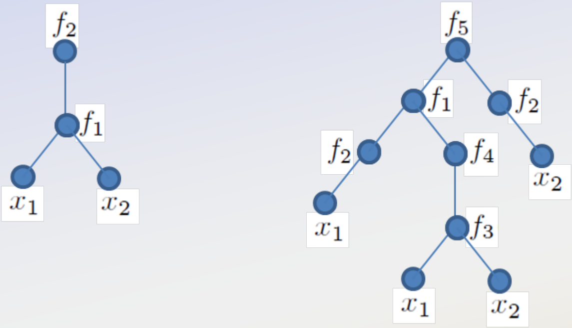
$$\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m],$$

wobei $\beta_1, \ldots, \beta_m$ die Teilbäume bezeichnen. Die Gesamtzahl von Knoten ist dann

$$\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \ldots + \#\beta_m.$$

Der einfachste Baum hat nur einen Knoten (seine Wurzel) und die Form

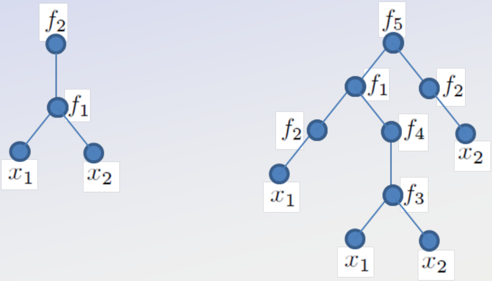
$$\beta = [\,], \quad \text{mit} \quad \#\beta = 1.$$



$$\beta_{F_1} = [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

wobei die beiden Bäume $\beta_{0,1} = \beta_{0,2} = []$ die Blätter darstellen, mit den Eingabewerten x_k in $\beta_{0,k}$, $k = 1, 2$.

Beispiel 2:



$$
\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_e, \beta_f] \\
\beta_e &= [\beta_a, \beta_b], \quad \beta_f = [\beta_d] \\
\beta_a &= [\beta_{0,i}], \quad \beta_b = [\beta_c], \quad \beta_c = [\beta_{0,ii}, \beta_{0,iii}], \quad \beta_d = [\beta_{0,iv}]
\end{aligned}
$$

wobei die vier Bäume $\beta_{0,k} = []$, $k = i, ii, iii, iv$ die Blätter darstellen.