COMPUTERORIENTIERTE
MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2018/19

Computer-orientierte Mathematik

8. Vorlesung - Christof Schuette

14.12.18

Stabilität:
Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs. Abgrenzung zur Kondition.
Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung.
Definition und Beispiele.

Gesamtfehlerabschätzungen:
Satz: Der Gesamtfehler lässt sich abschätzen durch die Summe von Eingabefehler, verstärkt durch die Kondition, und
Auswertungsfehler, verstärkt durch die Stabilität.

Stabilitätsabschätzungen:
Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität:
Grundrechenarten und Elementarfunktionen. Beispiele.
Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!
Das Polynom-Desaster in Matlab: Vereinfachte Stabilitätsanalyse.

Satz: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0)$, $h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \;, \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

Satz: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0)$, $h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

$$f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

$$f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

$$f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

$$f(x_0) = g(x_0)/h(x_0) \quad : \quad \sigma \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

Es seien $h : I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$ und $g : I_g \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen und

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

ein Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$. Bezeichnet κ_g die Kondition der Auswertung von g an der Stelle $y = h(x_0)$ und σ_h die Stabilität des obigen Algorithmus für h, so gilt für die Stabilität σ von

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

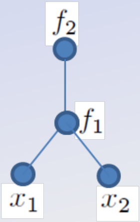
die Abschätzung

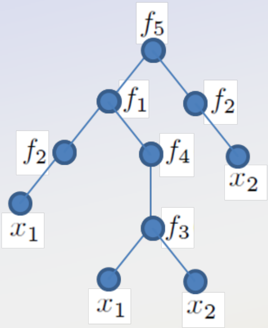
$$\sigma \leq 1 + \kappa_g \sigma_h \ .$$

Für $F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ betrachten wir die zwei Auswertungen

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2) &= f_2(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2 \\
F_2(x_1, x_2) &= f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big), \\
& f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y
\end{aligned}
$$

Auswertungsbäume



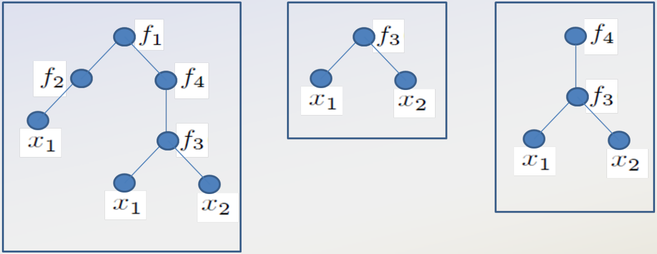


$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2$$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big),$$

$$f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Teilbäume



Wir bezeichnen einen Auswertungsbaum mit β bezeichnen und mit $\#\beta$ die Anzahl der Knoten in dem Baum β. Von seiner Wurzel aus gesehen, ist der Baum eindeutig dadurch gekennzeichnet, dass man die (Teil-)Bäume angibt, in die er nach Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten zerfällt:

$$\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m],$$

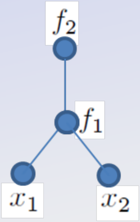
wobei $\beta_1, \ldots, \beta_m$ die Teilbäume bezeichnen. Die Gesamtzahl von Knoten ist dann

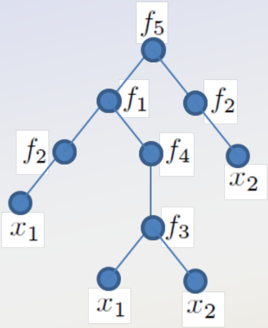
$$\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \ldots + \#\beta_m.$$

Der einfachste Baum hat nur einen Knoten (seine Wurzel) und die Form

$$\beta = [\,], \quad \text{mit} \quad \#\beta = 1.$$

Beispiel 1:

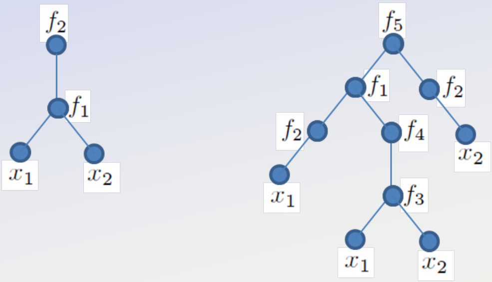




$$\beta_{F_1} = [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

wobei die beiden Bäume $\beta_{0,1} = \beta_{0,2} = []$ die Blätter darstellen, mit den Eingabewerten x_k in $\beta_{0,k}$, $k = 1, 2$.

Beispiel 2:



$$
\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_e, \beta_f] \\
\beta_e &= [\beta_a, \beta_b], \quad \beta_f = [\beta_d] \\
\beta_a &= [\beta_{0,i}], \quad \beta_b = [\beta_c], \quad \beta_c = [\beta_{0,ii}, \beta_{0,iii}], \quad \beta_d = [\beta_{0,iv}]
\end{aligned}
$$

wobei die vier Bäume $\beta_{0,k} = []$, $k = i, ii, iii, iv$ die Blätter darstellen.

Für die Auswertung ordnen wir jedem Knoten, der kein Blatt ist, eine Elementarfunktion zu. Wir bezeichnen die mit dem Teilbaum β assoziierte Elementarfunktion mit f^β. Durch die Auswertung ergeben sich in den Knoten (Zwischen-)Ergebnisse. Das Zwischenergebnis in dem Knoten, der die Wurzel des Teilbaumes β ist, bezeichnen wir mit z^β.

Für die Auswertung ordnen wir jedem Knoten, der kein Blatt ist, eine Elementarfunktion zu. Wir bezeichnen die mit dem Teilbaum β assoziierte Elementarfunktion mit f^β. Durch die Auswertung ergeben sich in den Knoten (Zwischen-)Ergebnisse. Das Zwischenergebnis in dem Knoten, der die Wurzel des Teilbaumes β ist, bezeichnen wir mit z^β.

z^β berechnet sich mittels der Elementarfunktion f^β aus den (vorher zu berechnenden) Ergebnissen $z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}$ der Berechnungen in den Teilbäumen $\beta_1, \ldots, \beta_m$ die durch Kanten mit der Wurzel von β verbunden sind.

Stellt β ein Blatt dar, so ist z^β ein Eingabewert (jedem z^β ist ein eindeutiger Eingabewert $x_{i(\beta)}$ zugeordnet).

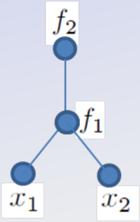
Für die Auswertung ordnen wir jedem Knoten, der kein Blatt ist, eine Elementarfunktion zu. Wir bezeichnen die mit dem Teilbaum β assoziierte Elementarfunktion mit f^β. Durch die Auswertung ergeben sich in den Knoten (Zwischen-)Ergebnisse. Das Zwischenergebnis in dem Knoten, der die Wurzel des Teilbaumes β ist, bezeichnen wir mit z^β.

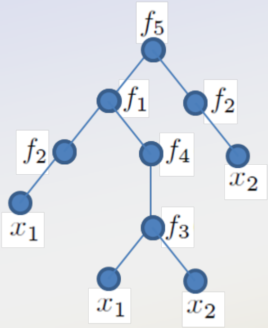
z^β berechnet sich mittels der Elementarfunktion f^β aus den (vorher zu berechnenden) Ergebnissen $z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}$ der Berechnungen in den Teilbäumen $\beta_1, \ldots, \beta_m$ die durch Kanten mit der Wurzel von β verbunden sind.

Stellt β ein Blatt dar, so ist z^β ein Eingabewert (jedem z^β ist ein eindeutiger Eingabewert $x_{i(\beta)}$ zugeordnet).

$$z^\beta = \begin{cases} x_{i(\beta)} & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m + 1 > 1,\ \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

Beispiel 1:

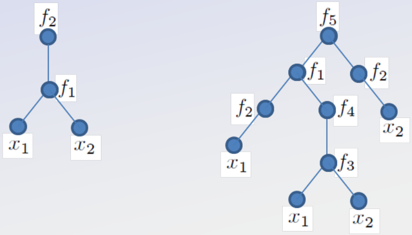




$$\beta_{F_1} \quad = \quad [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

wobei die beiden Bäume $\beta_{0,1} = \beta_{0,2} = []$ die Blätter darstellen, mit den Eingabewerten x_k in $\beta_{0,k}$, $k = 1, 2$.

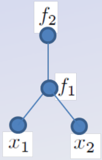
Beispiel 1:

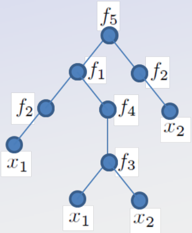


$$\beta_{F_1} \quad = \quad [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

$$f^{\beta_{F_1}} = f_2, \quad f^{\beta_1} = f_1, \quad z^{\beta_{0,k}} = x_k, \; k = 1, 2$$

Beispiel 2:





$$\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_e, \beta_f] \\
\beta_e &= [\beta_a, \beta_b], \quad \beta_f = [\beta_d] \\
\beta_a &= [\beta_{0,i}], \quad \beta_b = [\beta_c], \quad \beta_c = [\beta_{0,ii}, \beta_{0,iii}], \quad \beta_d = [\beta_{0,iv}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{\beta_{F_2}} = f_5, \qquad & f^{\beta_e} = f_1, \quad f^{\beta_f} = f_2, \\
& f^{\beta_a} = f_2, \quad f^{\beta_b} = f_4, \quad f^{\beta_c} = f_3, \quad f^{\beta_d} = f_2,
\end{aligned}$$

Die Stabilitätsindikatoren der rekursiven Auswertungsvorschrift

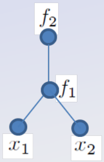
$$z^\beta = \begin{cases} x_{i(\beta)} & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m+1 > 1,\ \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

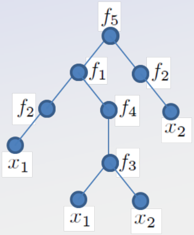
lassen sich mittels

$$\sigma^\beta \leq \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ 1 + \kappa(f^\beta)\max(\sigma^{\beta_1}, \ldots, \sigma^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m+1 > 1, \\ & \text{und} \quad \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

rekursiv abschätzen, wobei $\kappa(f^\beta)$ die relative Kondition der Funktion f^β in den Eingabewerten $z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}$ bezeichnet.

Beispiel 1:





$$\beta_{F_1} = [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

$$f^{\beta_{F_1}} = f_2, \quad f^{\beta_1} = f_1, \quad z^{\beta_{0,k}} = x_k, \; k = 1, 2$$

Beispiel 1:

Wir wählen konkrete Eingabewerte:
$x_1 = 10^{11} - 1 = 99999999999$, $x_2 = 10^{11}$.

Beispiel 1:

Wir wählen konkrete Eingabewerte:
$x_1 = 10^{11} - 1 = 99999999999,\ x_2 = 10^{11}$.

Aus $\sigma_{0,k} \leq 1$ für die Eingabebäume mit $k = 1, 2$ und

$$\kappa(f^{\beta_1}) = \kappa(f_1) = \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11} - 1,$$

erhalten wir sofort $\sigma^{\beta_1} \leq 2 \cdot 10^{11}$.

Beispiel 1:

Wir wählen konkrete Eingabewerte:
$x_1 = 10^{11} - 1 = 99999999999$, $x_2 = 10^{11}$.

Aus $\sigma_{0,k} \leq 1$ für die Eingabebäume mit $k = 1, 2$ und

$$\kappa(f^{\beta_1}) = \kappa(f_1) = \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11} - 1,$$

erhalten wir sofort $\sigma^{\beta_1} \leq 2 \cdot 10^{11}$. Dann mit $\kappa(f^{\beta_2}) = \kappa(f_2) \leq 2$ weiterhin sofort

$$\sigma^{F_1} = \sigma^{\beta_2} \leq 1 + 4 \cdot 10^{11}.$$

Beispiel 1:

Wir wählen konkrete Eingabewerte:
$x_1 = 10^{11} - 1 = 99999999999$, $x_2 = 10^{11}$.

Aus $\sigma_{0,k} \leq 1$ für die Eingabebäume mit $k = 1, 2$ und

$$\kappa(f^{\beta_1}) = \kappa(f_1) = \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11} - 1,$$

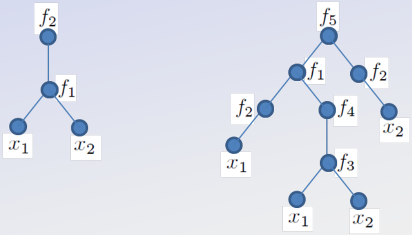
erhalten wir sofort $\sigma^{\beta_1} \leq 2 \cdot 10^{11}$. Dann mit $\kappa(f^{\beta_2}) = \kappa(f_2) \leq 2$ weiterhin sofort

$$\sigma^{F_1} = \sigma^{\beta_2} \leq 1 + 4 \cdot 10^{11}.$$

Für den maximalen (relativen) Rundungsfehler auf einer Maschine mit Maschinengenauigkeit $\varepsilon = 10^{-16}$ ergibt das

$$\frac{|F(x_1, x_2) - F_1(x_1, x_2)|}{|F(x_1, x_2)|} \leq \sigma^{F_1}\varepsilon \leq (1 + 4 \cdot 10^{11}) \cdot \varepsilon \approx 4 \cdot 10^{-5}.$$

Beispiel 2:



$$
\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_e, \beta_f] \\
\beta_e &= [\beta_a, \beta_b], \quad \beta_f = [\beta_d] \\
\beta_a &= [\beta_{0,i}], \quad \beta_b = [\beta_c], \quad \beta_c = [\beta_{0,ii}, \beta_{0,iii}], \quad \beta_d = [\beta_{0,iv}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{\beta_{F_2}} = f_5, \qquad & f^{\beta_e} = f_1, \quad f^{\beta_f} = f_2, \\
& f^{\beta_a} = f_2, \quad f^{\beta_b} = f_4, \quad f^{\beta_c} = f_3, \quad f^{\beta_d} = f_2,
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

Wieder sei $x_1 = 10^{11} - 1$, $x_2 = 10^{11}$. Aus $\sigma_{0,k} \leq 1$ für die Eingabebäume mit $k = i, ii, iii, iv$ und

$$\kappa(f^{\beta_c}) = \kappa(f_3) \leq 2,\ \kappa(f^{\beta_a}) = \kappa(f^{\beta_d}) = \kappa(f_2) \leq 2,\ \kappa(f^{\beta_b}) = \kappa(f_4) \leq 2,$$

erhalten wir $\sigma^{\beta_c} \leq 3$, $\sigma^{\beta_d} \leq 3$, $\sigma^{\beta_a} \leq 3$ und $\sigma^{\beta_b} \leq 7$.

Beispiel 2:

Wieder sei $x_1 = 10^{11} - 1$, $x_2 = 10^{11}$. Aus $\sigma_{0,k} \leq 1$ für die Eingabebäume mit $k = i, ii, iii, iv$ und

$$\kappa(f^{\beta_c}) = \kappa(f_3) \leq 2,\ \kappa(f^{\beta_a}) = \kappa(f^{\beta_d}) = \kappa(f_2) \leq 2,\ \kappa(f^{\beta_b}) = \kappa(f_4) \leq 2,$$

erhalten wir $\sigma^{\beta_c} \leq 3$, $\sigma^{\beta_d} \leq 3$, $\sigma^{\beta_a} \leq 3$ und $\sigma^{\beta_b} \leq 7$. Dann mit

$$\kappa(f^{\beta_e}) \leq \frac{|x_1^2| + |2x_1x_2|}{|x_1^2 - 2x_2x_1|} = \frac{3 \cdot 10^{22} - 4 \cdot 10^{11} + 1}{10^{22} - 1} \approx 3,$$

und

$$\kappa(f^{\beta_{F_2}}) \leq \frac{|x_2^2| + |x_1^2 - 2x_1x_2|}{|x_1^2 + x_1^2 - 2x_2x_1|} = 2 \cdot 10^{22} - 1,$$

sofort

$$\begin{aligned} \sigma^{\beta_e} &\leq 1 + 7\kappa(f^{\beta_e}) \approx 22 \\ \sigma^{F_2} = \sigma^{\beta_{F_2}} &\leq 1 + \sigma^{\beta_e}\kappa(f^{\beta_{F_2}}) \approx 44 \cdot 10^{22} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Fortsetzung

Wir erwarten bei der Auswertung F_2 mit den Eingabewerten $x_1 = 10^{11} - 1$ und $x_2 = 10^{11}$ auf einer Maschine mit Maschinengenauigkeit $\varepsilon = 10^{-16}$ also einen maximalen (relativen) Rundungsfehler von

$$\frac{|F(x_1, x_2) - F_2(x_1, x_2)|}{|F(x_1, x_2)|} \leq \sigma^{F_2}\varepsilon \approx 4.4 \cdot 10^7.$$

Die Durchführung dieser Berechnung auf einem handelsüblichen Taschenrechner liefert in der Tat $F_2(x_1, x_2) = 2097152$, also einen Fehler (relativ und absolut) von ca. $2.1 \cdot 10^6$.