

**Nachklausur zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik I
WS 2019/2020**

Name: _____ Matr.-Nr.: _____

Studiengang: Mathematik Bioinformatik Informatik
 anderer:

Studienziel: Bachelor(Mono) Bachelor(Kombi, Lehramt) Master
 Diplom Lehramt(Staatsexamen) anderes:

Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen.

Bitte benutzen Sie keinen Bleistift. Erlaubte Hilfsmittel sind alle Ihre selbst mitgebrachten schriftlichen Unterlagen und Bücher. Die Verwendung von allen elektronischen Hilfsmitteln wie Handy, ... außer einem nichtprogrammierbaren Taschenrechner ist nicht erlaubt. Die Klausur besteht mit Deckblatt aus insgesamt 3 Seiten auf zwei Blättern.

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Web-Seite der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, dass mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Web-Seite zur Vorlesung veröffentlicht wird.

_____ (Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Viel Erfolg!

Bitte lösen Sie **alle** folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen in der jeweiligen Spalte (links) an, ob sie richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort mit einem Satz oder Gegenbeispiel auf einem Extrablatt.

Für jede Teilaufgabe, bei der Ihre Antwort und die Begründung richtig sind, bekommen Sie einen Punkt. Für alle unvollständig oder falsch gelösten Teilaufgaben erhalten Sie null Punkte.

richtig	falsch	Aussage	Antwort korrekt	Begründung korrekt
		a) Seien $p, q > 1$. Dann lässt sich jede Gleitkommazahl $x \in \mathbb{G}(q, l)$ zur Basis $q > 1$ und Mantissenlänge l auch als Gleitkommazahl mit Basis p mit einer geeigneten Mantissenlänge k darstellen, d.h. es gibt ein k mit $x \in \mathbb{G}(p, k)$.		
		b) Die relative Kondition der Division x/y zweier Zahlen x und $y \neq 0$ kann beliebig groß werden.		
		c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A = LR$ eine mit dem Gauß'schen Algorithmus berechnete LR -Zerlegung. Dann gilt $\kappa(A) < \kappa(R)$.		
		d) Algorithmen, die die Subtraktion fast gleich großer Zahlen beinhalten, sind immer instabil.		
		e) Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Koeffizienten r_i bezüglich der q -adischen Darstellung $n = \sum_{i=0}^k r_i q^i$ eindeutig.		
		f) Für $x \rightarrow 0$ gilt $\sin(42x)x^2 \in o(x)$.		
		g) Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die relative Kondition der Auswertung an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$ gegeben durch $\kappa_{\text{rel}}(f, x) = \frac{ x }{f(x)} \kappa_{\text{abs}}(f, x).$		
		h) Seien $\ \cdot\ _p$ und $\ \cdot\ _q$ zwei Normen auf \mathbb{R}^n . Dann gilt für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n : $(\ x_k\ _p \rightarrow 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\ x_k\ _q \rightarrow 0).$		

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Algorithmen zur Auswertung von $f(x) = \log(x^2)$ für $x > 0$:

$$f_1(x) = \log(x \cdot x),$$

$$f_2(x) = 2 \cdot \log(x).$$

- Stellen Sie die Auswertung mittels eines Auswertungsbaums für Algorithmus f_1 grafisch dar. Schätzen Sie damit die Stabilität des Algorithmus ab.
- Stellen Sie die Auswertung mittels eines Auswertungsbaums für Algorithmus f_2 grafisch dar. Schätzen Sie damit die Stabilität des Algorithmus ab.
- Welcher Algorithmus ist für $x \approx 1$ vorzuziehen? Warum?

Aufgabe 3 (1+3+1 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Gauß'sche Algorithmus durchführbar?
- Geben Sie eine Permutation des Gleichungssystems (d.h. ein Gleichungssystem mit geeignet vertauschten Zeilen) an, so dass der Gauß'sche Algorithmus für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ durchführbar ist. Bestimmen Sie für diese Permutation der Matrix eine LR -Zerlegung mit dem Gauß'schen Algorithmus.
- Berechnen Sie für $\alpha = 5$ die Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 4 (2+1+2+1 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ des Problems

$$y = g(x) := e^x + x$$

für gegebenes $y \in \mathbb{R}$. Das Problem hat (das müssen Sie nicht zeigen) für jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

- Zeigen Sie, dass die Lösung für jedes $y \in \mathbb{R}$ eindeutig ist, d.h., dass die Umkehrabbildung $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert.
- $\kappa_{\text{abs}}(g^{-1}, y)$ sei die absolute Kondition der Gleichung mit rechter Seite y bezüglich Störungen von y . Berechnen Sie $\kappa_{\text{abs}}(g^{-1}, y)$ in Abhängigkeit von $x = g^{-1}(y)$ und zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\kappa_{\text{abs}}(g^{-1}, y) \leq 1.$$

- $\kappa_{\text{rel}}(g^{-1}, y)$ sei die relative Kondition der Gleichung mit rechter Seite y bezüglich Störungen von y . Berechnen Sie $\kappa_{\text{rel}}(g^{-1}, y)$ in Abhängigkeit von $x = g^{-1}(y)$.
- Zeigen Sie, dass für $|y|$ groß genug gilt:

$$\kappa_{\text{rel}}(g^{-1}, y) \leq 1.$$

Sie dürfen verwenden, dass für $|y| \rightarrow \infty$ auch $|x| \rightarrow \infty$ gilt.

Ende der Klausur