Computerorientierte Mathematik I

2. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

25.10.2019

Freie Universität Berlin

Rückblick: Vorlesung vom 18.10.2019

Fehlerkonzepte

- Modellfehler
- Diskretisierungsfehler
- Rundungsfehler

Kondition des Problems

- Kleine Ursache kann große Wirkung haben (Orkan Lothar)

Stabilität eines Algorithmus

Komplexität eines Problems

Effizienz eines Algorithmus

Die natürlichen Zahlen (anschaulich)

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

- kennt jedes Kind
- beginnen mit 0 oder 1
- jede Zahl hat einen Nachfolger
- gut geeignet zum Abzählen
- keine Schulden, keine Tortenstücke
- ...

Definition

$\mathbb{N}$ ist die Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$
- Es gibt eine Abbildung $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

(S1) S ist injektiv (d.h. $S(n) \neq S(m)$ falls $n \neq m$).
(S2) $0 \notin S(\mathbb{N}) = \{S(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
(S3) Ist $M \subset \mathbb{N}$ und $0 \in M$ sowie $S(M) \subset (M)$, dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Anschaulich:
Jede Zahl hat genau einen Nachfolger. Wenn wir bei 0 anfangen und immer weiter zum Nachfolger gehen, treffen wir jede Zahl genau einmal.

Definition (Addition)

(A1) $n + 0 = n$

(A2) $n + S(m) = S(n + m)$

Definition (Addition)

(A1) $n + 0 = n$

(A2) $n + S(m) = S(n + m)$

Damit ist wegen (S3) die Addition $n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert.

Definition (Addition)

(A1) $n + 0 = n$

(A2) $n + S(m) = S(n + m)$

Damit ist wegen (S3) die Addition $n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert.

Nachweis der Rechenregeln

Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$
Kommutativität: $n + m = m + n$

Rechnen mit natürlichen Zahlen

Definition (Addition)

(A1) $n + 0 = n$

(A2) $n + S(m) = S(n + m)$

Damit ist wegen (S3) die Addition $n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert.

Nachweis der Rechenregeln

Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$
Kommutativität: $n + m = m + n$

Folgerung

Wir können mit natürlichen Zahlen rechnen.

Freie Universität Berlin

Definition (Addition)

(A1) $n + 0 = n$

(A2) $n + S(m) = S(n + m)$

Damit ist wegen (S3) die Addition $n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert.

Nachweis der Rechenregeln

Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$
Kommutativität: $n + m = m + n$

Folgerung

Wir können mit natürlichen Zahlen rechnen.

Aber:

Bevor wir die Summen zweier konkretet natürlicher Zahlen ausrechnen können, muss jede natürliche Zahl genau einen Namen haben!

Freie Universität Berlin

Problem

Unendlich viele natürliche Zahlen erfordern unendlich viele Namen.

Ziffernketten

Problem

Unendlich viele natürliche Zahlen erfordern unendlich viele Namen.

Lösung

- Verwende Ziffernketten: $z_1 z_2 z_3 \ldots z_k \qquad z_i \in \mathcal{Z}, i = 1, \ldots, k$
- Endliche Ziffernmenge $\mathcal{Z}$

Ziffernketten

Problem

Unendlich viele natürliche Zahlen erfordern unendlich viele Namen.

Lösung

- Verwende Ziffernketten: $z_1 z_2 z_3 \dots z_k \qquad z_i \in \mathcal{Z}, i = 1, \dots, k$
- Endliche Ziffernmenge $\mathcal{Z}$

Interpretation

- Systematische Konstruktion unterschiedlicher Symbole
- Bilden von Worten aus einem Alphabet

Satz

Sei $\mathcal{Z}$ eine endliche Ziffernmenge und

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{z_1 z_2 \ldots z_k \mid k \in \mathbb{N}, z_i \in \mathcal{Z}, i = 1, \ldots, k\}$$

die Menge aller endlichen Ziffernketten. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(\mathcal{Z})$

Definition

Die Ziffernmenge $\mathcal{Z}$ und die Zuordnung φ erzeugen eine Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{N}$.

Definition

Eine Menge M, für die eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ existiert, heißt abzählbar.

Beispiele für Ziffernsysteme

Römische Zahlen

- $\mathcal{Z} = \{I, V, X, L, C, D, M\}$
- Kein Ziffernsystem!

Unärsystem

- Nur eine Ziffer: $\mathcal{Z} = \{|\}$
- Ziffernketten: $\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{|, ||, |||, \dots\}$
- Zuordnung: $\varphi(0) =$, $\varphi(1) = |$, $\varphi(S(n)) = \varphi(n)|$
- Beispiel: $\varphi(4) = ||||$

Praktische Anwendung

. . . vor 15000 - 20000 Jahren im Kongo:

. . . heute:

Satz

Sei $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ *fest gewählt.*

Dann läßt sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ *als Potenzzerlegung*

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i$$

darstellen.
Die Koeffizienten $r_i \in \{0, \ldots, q-1\} \subset \mathbb{N}$ *sind eindeutig.*

Definition

- Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{z_0, \ldots, z_{q-1}\}$
- Zuordnung:

$$n \mapsto \varphi(n) = z_n, \qquad n = 0, \ldots, q-1$$

und für $n > q - 1$

$$n \mapsto \varphi(n) = z_{r_k} z_{r_{k-1}} \ldots z_{r_0} \qquad \text{mit} \qquad n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i, \quad 0 \le r_i \le q-1$$

Diese Zifferndarstellung heißt q-adische Darstellung.

Beispiele

Freie Universität Berlin

Dezimalsystem

- $q = 10$ und $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Hexadezimalsystem

- $q = 16$ und $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

q-adische Systeme mit $q \leq 36$

- Erweiterung mit $\{A, B, C, \dots, Z\}$

Konvention

- Keine Unterscheidung zwischen Darstellung und Zahl:

$$(z_k z_{k-1} \dots z_0)_q = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}$$

- Kein Index q, falls $q = 10$
- Den Index i von z_i nennt man Stelle
- $(z_k z_{k-1} \dots z_0)_q$ nennt man eine k-stellige Zahl

Positionssystem zur Basis $q = 2$: Dualsystem

Dualsystem (auch Binärsystem)

- Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$

Ideal für technische Umsetzung

- 1 Binärstelle $\Leftrightarrow$ 1 Bit $\Leftrightarrow$ 1 Schalter
- Alle modernen Rechenmaschinen arbeiten mit dem Dualsystem

Zahlenbereich

Im Dualsystem lassen sich mit N Stellen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq n \leq 2^N - 1$$

darstellen.

Freie Universität Berlin

- Abakus
- mechanische Zählräder
- 1623 Wilhelm Schickard, 1642 Blaise Pascal, 1673 Gottfried Wilhelm Leibniz: Rechenmaschinen mit dekadischem System
- 1679 Leibniz: Dualsystem
- 1935 - 1938 Konrad Zuse (Berlin): erster frei programmierbarer Rechner Z1 (mechanisch)

- 1941 Konrad Zuse: elektromechanisch (Relais): Z3
- 1944 Cambridge: rein elektronisch (Elektronenröhren): COLOSSOS
- 1947 John Bardeen, Walter Brattain, William Shockley: Transistor
- 1971 Intel: Mikroprozessor
- 2000 Pentium 4: 42 Millionen Transistoren auf 217mm^2
- 2016 Core i7 (Kaby Lake): etwa 2.2 Milliarden Transistoren auf 126mm^2

Technische Realisierung

- Kleinste Einheit (0 oder 1): Bit
- Bits werden in festen Längen zusammengefaßt
- 8 Bits = 1 Byte mit $2^8 = 256$ verschiedenen Zuständen
- Feste Anzahl Bytes für Zahlendarstellung
- Bezeichnungen: BYTE, WORD, DWORD, ... (nicht einheitlich)
- Üblich: WORD = größe einer Speicheradresse
- Bereich von 64-Bit Zahlen

$$0 \leq n \leq 2^{64} - 1 > 18 \cdot 10^{18} = 18 \text{ Trillionen}$$

Die ganzen Zahlen (anschaulich)

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- kennt (fast) jedes Kind
- beginnen nirgdends
- Es gibt positive und negative Zahlen
- Schulden, aber keine Tortenstücke

Problem

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

Problem

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

Ausweg

Erweitere $\mathbb{N}$ zu $\{x = (n, m)\}$. Wir schreiben $(n, m) = m - n$.

Freie Universität Berlin

Problem

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

Ausweg

Erweitere $\mathbb{N}$ zu $\{x = (n, m)\}$. Wir schreiben $(n, m) = m - n$.

Neues Problem

Nicht eindeutig: $x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ hätten verschiedene Lösungen

Die ganzen Zahlen (konstruktiv)

Problem

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

Ausweg

Erweitere $\mathbb{N}$ zu $\{x = (n, m)\}$. Wir schreiben $(n, m) = m - n$.

Neues Problem

Nicht eindeutig: $x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ hätten verschiedene Lösungen

Neuer Ausweg

Äquivalenzklassen (siehe Skript, Analysis I, Lineare Algebra I, . . .)

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- Ja, ... denn $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- Ja, ...denn $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- Nein, ...denn $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- Ja, ... denn $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- Nein, ... denn $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- Ja, ... denn $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- Nein, ... denn $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Vorsicht mit unendlichen Mengen!

Zifferndarstellung mit Vorzeichenbit

Darstellung positiver Zahlen

$$z_k z_{k-1} \dots z_0{}_q = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Zusätzliches Symbol: „–“

Darstellung negativer Zahlen

$$-z_k z_{k-1} \dots z_0{}_q = -\sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Technische Realisierung: Vorzeichenbit

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Vorzeichenbit

$$\mathbb{Z} = \{\dots, 111_2, 110_2, 11_2, 00_2, 01_2, 010_2, 011_2, \dots\}$$

Darstellung

- Eindeutigkeit bei endlich vielen Stellen: 1.Stelle $=$ Vorzeichenbit

Nachteile

- Keine eindeutige Darstellung von 0: $0 = 00_2 = 10_2$
- Addition natürlicher und ganzer Zahlen grundsätzlich verschieden

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Zweierkomplement

Grundannahme

Feste Anzahl Stellen N

Kochrezept

Das Zweierkomplement von $n < 0$ erhält man durch:

Dualdarstellung von $-n$, umklappen aller Bits, 1 addieren

Beispiel

Bei $N = 4$ Bits soll $n = -3$ dargestellt werden:

$$-3 \quad \to \quad -(0011_2) \quad \to \quad 1100 \quad \to \quad 1101$$

Berechnung des Zweierkomplements

- Feste Anzahl Stellen N
- Größte darstellbare natürliche Zahl wäre $2^N - 1 = 111\ldots111_2$
- Umklappen aller Bits von $n \geq 0$ entspricht: $(2^N - 1) - n = 1\ldots1_2 - n$
- Addieren von eins führt zu: $(2^N - 1) - n + 1 = 1\ldots1_2 - n + 1$