# Computerorientierte Mathematik I

## 3. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

01.11.2019

# Rückblick: Vorlesung vom 25.10.2019

## Darstellung natürlicher und ganzer Zahlen

### Ziffernsysteme

- Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen
- Ziffernsysteme: Definition und Beispiele
- Satz: Die MEnge aller Ziffernketten $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ ist abzählbar.
- Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner

### Positionssysteme

- Definition und Beispiele
- Dezimal- und Dualdarstellung natürlicher Zahlen
- Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner

### Ganze Zahlen

- Erweiterung der Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$
- Dualdarstellung mit Vorzeichenbit
- Darstellung negativer ganzer Zahlen im Rechner: Zweierkomplement

# Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (anschaulich)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

## Bruchrechenregeln

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \qquad\qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

## Konsequenz

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \Leftrightarrow \qquad ab' = a'b$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

## Problem

Im Allgemeinen hat $x \cdot b = a$ keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

## Konstruktion von $\mathbb{Q}$

- Abschluss von $\mathbb{Z}$ unter Division
- Äquivalenzklassen von Paaren $(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

### Satz

*Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine Zifferndarstellung von $\mathbb{Q}$.*
*Ziffernmenge:* $\mathcal{Z} \cup \{-\} \cup \{/\}$

### Folgerung

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

### Beispiele

- Dezimalsystem
- Dualsystem

$$z_n \dots z_0, z_{-1} \dots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i q^i, \qquad z_i \in \{0, \dots, q-1\}, n, m \in \mathbb{N}$$

## Beispiele

- Dezimalbrüche: $q = 10$
- Dualbruch: $q = 2$

### Satz

*Jeder Dualbruch ist ein Dezimalbruch, nicht umgekehrt.*

### Satz

*Jeder $q$-adische Bruch ist eine rationale Zahl, nicht umgekehrt.*

# Periodische Dezimalbrüche

### Beispiel

Periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,1234234\cdots = 0,1\overline{234}$

### Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{-(m+1)}}{1-q^{-1}} = \frac{1}{1-q^{-1}}$$

### Satz

*Jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl und umgekehrt.*

### Eindeutigkeit

- Im Allgemeinen ist die Darstellung nicht eindeutig: $1,\overline{0} = 0,\overline{9}$
- Eindeutigkeit erzwingen: $\overline{0}$ ist verboten.

Darstellung als Paar von `integer`-Zahlen

- `integer` = Ganzzahldarstellung im Rechner
- Länge muß variable sein
- Aufwand für Rechenoperationen nicht a priori bekannt (Kürzen!)

Keine standardisierte Hardware-Unterstützung

- Spezialanwendungen (Schnitterkennung in der Computergraphik)
- Symbolik-Programme (Maple, Mathematica, ...)
- Aufwendig und langsam

## Unendliche Dezimalbrüche

$$\mathbb{R} = \left\{\pm z_n \dots z_0, z_{-1} \cdots \mid z_i = 0, \dots, 9\right\}$$

- Endliche Dezimalbrüche
- Unendliche periodische Dezimalbrüche
- Unendliche nicht-periodische Dezimalbrüche

# Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (konstruktiv)

## Unendliche Dezimalbrüche

$$\mathbb{R} = \{\pm z_n \dots z_0, z_{-1} \cdots \mid z_i = 0, \dots, 9\}$$

## Problem

Im Allgemeinen haben Cauchy-Folgen keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$

## Konstruktion von $\mathbb{R}$

- Vervollständigung von $\mathbb{Q}$
- Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$
- Dedekindsche Schnitte: Mengen von Paaren von Teilmengen von $\mathbb{Q}$

### Erinnerung

Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

### Erinnerung

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

### Erinnerung

Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

### Erinnerung

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

### Satz

$\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

(Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt, heißt $\mathbb{R}$ überabzählbar.)

### Erinnerung

Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

### Erinnerung

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

### Satz

$\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

(Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt, heißt $\mathbb{R}$ überabzählbar.)

Es gibt keine Zifferndarstellung von $\mathbb{R}$!

Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

# Absolute und relative Fehler

## Fehler

- Wir sprechen von „Fehlern", wenn ein Wert $x$ ist nicht exakt ist.
- „Fehler" $=$ Unterschied zwischen exaktem und ungenauem Wert $\tilde{x}$.

## Absoluter Fehler

$$|x - \tilde{x}|$$

- Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$, $\qquad |x - \tilde{x}| = 1$.
- Nachteil: Abhängig von Einheiten!

## Relativer Fehler

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}, \qquad x \neq 0$$

- Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$, $\qquad |x - \tilde{x}|/|x| = 10^{-3}$.

# Festkommazahlen ($q$-adische Brüche)

## Festkommazahlen

$$z_{n-1}\dots z_0, z_{-1}\dots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i q^i, \qquad z_i \in \{0,\dots,q-1\}$$

- $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt
- $l = m + n$ Stellen verfügbar
- Fester, endlicher Speicherplatz pro Zahl

Beispiel: $q = 10$, $l = 4$, $n = 3$, $m = 1$

- $x = 0,123$, Runden: $\tilde{x} = 0,1$, relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,2$
- $x = 123$, exakt darstellbar: $\tilde{x} = 123$, relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$.

## Folgerung

Um die Stellen optimal auszunutzen, sollte man $m$ und $n$ variable halten!

## Definition (Gleitkommazahlen)

Jede in der Form

$$\tilde{x} = (-1)^s a \cdot q^e \tag{1}$$

mit Vorzeichenbit $s \in \{0,1\}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ und Mantisse $a = 0$ oder

$$a = 0, a_1 \ldots a_l = \sum_{i=1}^{l} a_i q^{-i}, \qquad a_i \in \{0, \ldots, q-1\}, a_1 \neq 0$$

darstellbare Zahl $\tilde{x}$ heißt Gleitkommazahl mit Mantissenlänge $l \in \mathbb{N}, l \geq 1$.

Die Menge all dieser Zahlen heißt $\mathbb{G}(q,l)$.

Die Darstellung (1) heißt normalisierte Gleitkommadarstellung.

Beispiel: $q = 10$, $l = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,123 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Beispiel: $q = 10,\ l = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,123 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,123 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Beispiel: $q = 10,\ l = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,123 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,123 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123,456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$

Beispiel: $q = 10,\ l = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,123 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,123 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123,456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$
- $x = 0,00123456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^{-2}$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$