Computerorientierte Mathematik I

5. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

15.11.2019

Rundungsfehler und Gleitkommaarithmetik

Runden und Rundungsfehler

- Der absolute Rundungsfehler ist nicht gleichmäßig beschränkt.
- Der relative Rundungsfehler ist gleichmäßig beschränkt.
- Obere Schranke: Maschinengenauigkeit $\mathrm{eps} = \mathrm{eps}(q, l)$

Praktische Realisierung von Gleitkommazahlen

- Endlicher Exponentenbereich bewirkt endlichen Zahlenvorrat: `float`,`double`

Zahlenmengen statt Zahlen

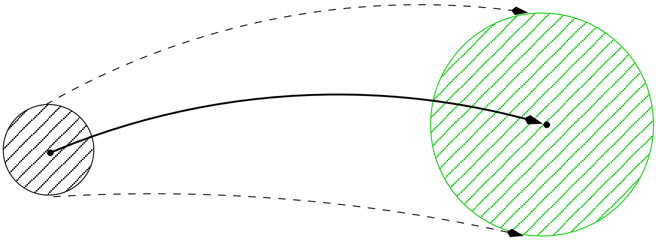
- Mengen aller Gleitkomma-Approximationen von $x \in \mathbb{R}$ mit relativem Fehler $\mathrm{eps}(q, l)$
- Mengen aller reellen Zahlen, die auf $\tilde{x} \in \mathbb{G}(q, l)$ gerundet werden.
- Folgerung: Gleichheitsabfragen von Gleitkommazahlen verboten!

Algebraische Eigenschaften

- Gleitkommaarithmetik, Verlust von Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Invertierbarkeit
- Folgerung: Übliche Umformungen sind nicht mehr äquivalent.

Freie Universität Berlin

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



Das Landau-Symbol o

Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I = (-a, a)$ eine Funktion. Wir verwenden die Schreibweise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad (\text{für } \varepsilon \to 0).$$

Alternative Schreibweise: $f(\varepsilon) \in o(\varepsilon)$

Beispiele

- $\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$
- $\varepsilon^{3/2} = o(\varepsilon)$
- $\frac{\varepsilon}{\log \varepsilon} = o(\varepsilon)$
- $\varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon \sum_{i=1}^{28} (\sin(\varepsilon))^i = o(\varepsilon)$

Gegeben: $x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0$

Approximationen mit relativem Fehler $\varepsilon \geq 0$:

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x), \qquad \tilde{y} = y(1 + \varepsilon_y), \qquad \varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$$

Satz

Es gilt

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

- Dominierender Fehleranteil: 2ε
- Vernachlässigung des Terms höherer Ordnung: $\varepsilon^2 = o(\varepsilon^2)$
- Die relative Kondition ist der Verstärkunsfaktor κ des Eingabefehlers: $\kappa = 2$

Relative Kondition der Division und Addition

Freie Universität Berlin

Satz (Division)

Es gilt

$$\frac{|(x/y) - (\tilde{x}/\tilde{y})|}{|x/y|} \le 2\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Die relative Kondition der Division ist $\kappa = 2$.

Satz (Addition)

Es gilt

$$\frac{|(x+y) - (\tilde{x}+\tilde{y})|}{|x+y|} \le \varepsilon.$$

Die relative Kondition der Addition ist $\kappa = 1$.

Satz (Subtraktion)

Es sei $x, y > 0$. *Dann gilt*

$$\frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x-y|} \leq \left(\frac{|x|+|y|}{|x-y|}\right)\varepsilon.$$

Die relative Kondition der Subtraktion ist $\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|}$.

Satz (Subtraktion)

Es sei $x, y > 0$. Dann gilt

$$\frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x-y|} \le \left(\frac{|x|+|y|}{|x-y|}\right)\varepsilon.$$

Die relative Kondition der Subtraktion ist $\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|}$.

Auslöschung

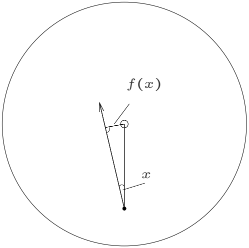
Ist $x \approx y$, so wird $\kappa = \frac{|x|+|y|}{|x-y|}$ beliebig groß!.

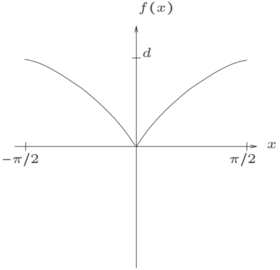
```
>>> from numpy import *
>>> x = pi
>>> y = pi+1e-14
>>> x
3.141592653589793
>>> y
3.1415926535898033
>>> y-x
1.021405182655144e-14
```

Es bleiben nur 2 korrekte Stellen übrig!

Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden!

Einlochen eines Golfballs





- Distanz zum Loch: d, Radius des Lochs: r_L, Abschlagswinkel: x
- Minimaler Abstand der Bahn zum Lochmittelpunkt: $f(x) = d|\sin(x)|$
- Optimaler Abschlagswinkel: $x_0 = 0$
- Erlaubte Toleranz: $|x - x_0| < |\arcsin(r_L/d)|$

Gegeben:

Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Problem:

$(*)$ Auswertung von f an der Stelle x_0

Definition (Absolute Kondition)

Die absolute Kondition $\kappa_{\text{abs}}(x_0)$ von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}}(x_0)|x_0 - x| + o(|x_0 - x|).$$

Liegt dies für keine reelle Zahl $\kappa_{\text{abs}}(x_0)$ vor, so wird $\kappa_{\text{abs}}(x_0) = \infty$ gesetzt.

Absolute Kondition und Ableitung

Satz

Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{abs}(x_0) = |f'(x_0)|$.

Beispiel

Sei $f(x) = x^2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\kappa_{\mathsf{abs}}(x_0) = |f'(x_0)| = 2|x_0|$.

Absolute Kondition und Lipschitz-Stetigkeit

Definition

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, falls gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in I.$$

Beispiel

$f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ auf $I = \mathbb{R}$, denn $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Satz

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt für die absolute Kondition von $(*)$

$$\kappa_{abs}(x_0) \leq L.$$

Satz

Sei

- $h : I_1 \to \mathbb{R}$ *und* $g : I_2 \to \mathbb{R}$,
- $h(x_0) \subset I_2$,
- $\kappa_{abs}(h, x_0)$ *die abs. Kondition der Auswertung von* h *an* x_0,
- $\kappa_{abs}(g, y_0)$ *die abs. Kondition der Auswertung von* g *an* $y_0 = h(x_0)$.

Dann gilt für die absolute Kondition der Auswertung von $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$ *an der Stelle* x_0

$$\kappa_{abs}(f, x_0) \leq \kappa_{abs}(g, y_0)\kappa_{abs}(h, x_0).$$

Ist h *in* x_0 *und* g *in* $y_0 = h(x_0)$ *differenzierbar, so liegt Gleichheit vor.*

Beispiel: Golfproblem

Abstandsfunktion: $f(x) = d|\sin(x)| = |d \cdot \sin(x)|$

Geschachtelte Funktion: $f(x) = g(h(x)), \quad g(y) = |y|, \quad h(x) = d \cdot \sin(x)$

Abstandsfunktion: $f(x) = d|\sin(x)| = |d \cdot \sin(x)|$

Geschachtelte Funktion: $f(x) = g(h(x)), \quad g(y) = |y|, \quad h(x) = d \cdot \sin(x)$

Kondition $\kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0)$ in $x_0 = 0$:

$$\kappa_{\mathsf{abs}}(g, y_0) \leq 1, \quad \kappa_{\mathsf{abs}}(h, x_0) \leq |d \cdot \cos(x_0)| = d \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0) \leq 1 \cdot d.$$

Freie Universität Berlin

Abstandsfunktion: $f(x) = d|\sin(x)| = |d \cdot \sin(x)|$

Geschachtelte Funktion: $f(x) = g(h(x)), \quad g(y) = |y|, \quad h(x) = d \cdot \sin(x)$

Kondition $\kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0)$ in $x_0 = 0$:

$$\kappa_{\mathsf{abs}}(g, y_0) \leq 1, \quad \kappa_{\mathsf{abs}}(h, x_0) \leq |d \cdot \cos(x_0)| = d \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0) \leq 1 \cdot d.$$

Erlaubte Toleranz: $|x - x_0| < |\arcsin(r_L/d)|$

Linearisierung:

$$|x_0 - x| \leq \frac{r_L}{d} \qquad \Rightarrow \qquad |f(x_0) - f(x)| \leq d|x_0 - x| + o(|x_0 - x|) < r_L$$

Relative Kondition der Funktionsauswertung

Gegeben:

Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$, $\quad x_0 \neq 0$, $\quad f(x_0) \neq 0$

Problem: $(*)$

Auswertung von f an der Stelle x_0

Definition (Relative Kondition)

Die absolute Kondition $\kappa_{\mathsf{rel}}(x_0)$ von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}(x_0) \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|).$$

Liegt dies für keine reelle Zahl $\kappa_{\mathsf{rel}}(x_0)$ vor, so wird $\kappa_{\mathsf{rel}}(x_0) = \infty$ gesetzt.

Absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \le \kappa_{\mathsf{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

Relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \le \kappa_{\mathsf{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|).$$

Absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathsf{abs}}|x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

Relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathsf{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|).$$

Satz

Es gilt

$$\kappa_{rel} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}\kappa_{abs}.$$

Beispiel: $f(x) = ax$

Absolute Kondition

$$\kappa_{\mathsf{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$$

Relative vs. absolute Kondition

Beispiel: $f(x) = ax$

Absolute Kondition

$$\kappa_{\mathsf{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$$

Relative Kondition

$$\kappa_{\mathsf{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}\kappa_{\mathsf{abs}} = \frac{|x_0|}{|ax_0|}|a| = 1$$

Relative vs. absolute Kondition

Beispiel: $f(x) = ax$

Absolute Kondition

$$\kappa_{\mathsf{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$$

Relative Kondition

$$\kappa_{\mathsf{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}\kappa_{\mathsf{abs}} = \frac{|x_0|}{|ax_0|}|a| = 1$$

Folgerung

- Relative und absolute Kondition können sich beliebig stark unterscheiden.
- Aus $|a| \gg 1$ folgt $\kappa_{\mathsf{abs}} \gg \kappa_{\mathsf{rel}}$
- Aus $|a| \ll 1$ folgt $\kappa_{\mathsf{abs}} \ll \kappa_{\mathsf{rel}}$

Weiteres Beispiel: Absolute Kondition der Subtraktion