# Computerorientierte Mathematik I

## 6. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

21.11.2019

Freie Universität Berlin

## Kondition

### Relative Kondition der Grundrechenarten

- Addition, Multiplikation, Division sind gut konditioniert
- Subtraktion ist schlecht konditioniert (Auslöschung)
- Subtraktion fast gleicher Zahlen vermeiden!

### Absolute Kondition der Funktionsauswertung

- Die absolute Kondition ist die kleinste Zahl $\kappa_{\mathsf{abs}}$ mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \le \kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0)|x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \qquad \text{für } x \to x_0$$

### Sätze zur absolute Kondition

- Ist $f$ differenzierbar in $x_0$, so gilt $\kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0) = |f'(x_0)|$
- Ist $f$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L$, so gilt

$$\kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0) \le L.$$

- Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt

$$\kappa_{\mathsf{abs}}(f, x_0) \le \kappa_{\mathsf{abs}}(g, h(x_0))\kappa_{\mathsf{abs}}(h, x_0).$$

# Kondition der Funktionsauswertung

Gegeben:

Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$

Problem:

($*$) Auswertung von $f$ an der Stelle $x_0$

**Definition (Absolute Kondition)**

Die absolute Kondition $\kappa_{\textsf{abs}}(f, x_0)$ von ($*$) ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \le \kappa_{\textsf{abs}}(f, x_0)|x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \qquad \text{für } x \to x_0.$$

Liegt dies für keine reelle Zahl $\kappa_{\textsf{abs}}(f, x_0)$ vor, so wird $\kappa_{\textsf{abs}}(f, x_0) = \infty$ gesetzt.

# Relative Kondition der Funktionsauswertung

Gegeben:

Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$, $\quad x_0 \neq 0$, $\quad f(x_0) \neq 0$

Problem: $(*)$

Auswertung von $f$ an der Stelle $x_0$

## Definition (Relative Kondition)

Die absolute Kondition $\kappa_{\text{rel}}(f, x_0) = \kappa_{\text{rel}}$ von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|) \qquad \text{für } x \to x_0.$$

Liegt dies für keine reelle Zahl $\kappa_{\text{rel}}$ vor, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

## Absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathsf{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

## Relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathsf{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|).$$

# Relative vs. absolute Kondition

## Absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathsf{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

## Relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathsf{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|).$$

## Satz

*Es gilt*

$$\kappa_{rel} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{abs}.$$

Freie Universität Berlin

Beispiel: $f(x) = ax$

Absolute Kondition

$$\kappa_{\mathsf{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$$

# Relative vs. absolute Kondition

Beispiel: $f(x) = ax$

## Absolute Kondition

$$\kappa_{\mathsf{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$$

## Relative Kondition

$$\kappa_{\mathsf{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}\kappa_{\mathsf{abs}} = \frac{|x_0|}{|ax_0|}|a| = 1$$

Beispiel: $f(x) = ax$

Absolute Kondition

$$\kappa_{\mathsf{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$$

Relative Kondition

$$\kappa_{\mathsf{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}\kappa_{\mathsf{abs}} = \frac{|x_0|}{|ax_0|}|a| = 1$$

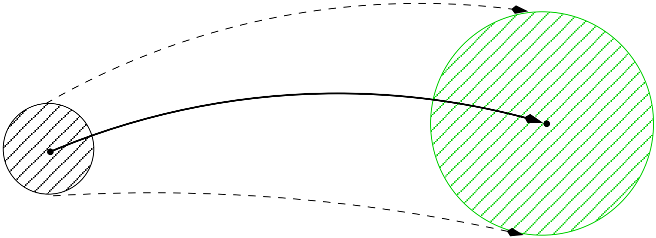
Folgerung

- Relative und absolute Kondition können sich beliebig stark unterscheiden.
- Aus $|a| \gg 1$ folgt $\kappa_{\mathsf{abs}} \gg \kappa_{\mathsf{rel}}$
- Aus $|a| \ll 1$ folgt $\kappa_{\mathsf{abs}} \ll \kappa_{\mathsf{rel}}$

Weiteres Beispiel: Absolute Kondition der Subtraktion

Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

## Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



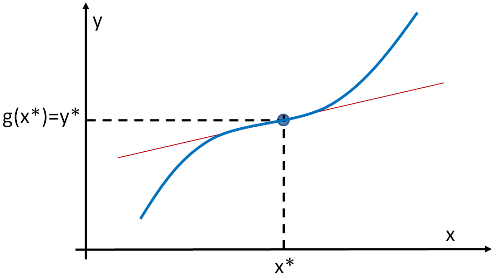
Gegeben:

Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\quad g : I \to \mathbb{R}$, $\quad y^* \in \mathbb{R}$

Problem:

$$(*) \qquad x^* \in I: \qquad g(x^*) = y^*,$$

d.h.: $(*)$ Finde $x^* \in I$, so dass $g(x^*) = y^*$ gilt.



### Definition (Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen)

Die absolute Kondition $\kappa_{\text{abs}}$ von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|x^* - x| \le \kappa_{\text{abs}} |y^* - y| + o(|y^* - y|) \qquad \text{für } y \to y^*$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y|$ zu $y^*$ und den zugehörigen Lösungen $x$ des gestörten Problems

$$x \in I: \qquad g(x) = y.$$

Existiert keine solche Zahl $\kappa_{\text{abs}}$, so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

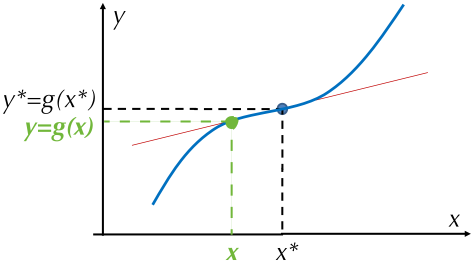
# Existenz und Eindeutigkeit gestörter Lösungen

## Lemma

*Sei $g$ stetig differenzierbar in $(a, b)$, $x^* \in (a, b)$ eine Lösung von $g(x^*) = y^*$ sowie*

$$g'(x^*) \neq 0.$$

*Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a \leq \alpha < x^* < \beta \leq b$, so dass das gestörte Problem $x : g(x) = y$ für jedes $y \in V = g((\alpha, \beta))$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in U = (\alpha, \beta)$ besitzt.*



# Existenz und Eindeutigkeit gestörter Lösungen

## Lemma

*Sei* $g$ *stetig differenzierbar in* $(a,b)$, $x^* \in (a,b)$ *eine Lösung von* $g(x^*) = y^*$ *sowie*

$$g'(x^*) \neq 0.$$

*Dann gibt es* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq \alpha < x^* < \beta \leq b$, *so dass das gestörte Problem* $x : g(x) = y$ *für jedes* $y \in V = g((\alpha,\beta))$ *eine eindeutig bestimmte Lösung* $x \in U = (\alpha,\beta)$ *besitzt.*

Folgerung Falls $g'(x^*) \neq 0$ gilt, so existiert eine Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$, so dass

$$g(g^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in V.$$

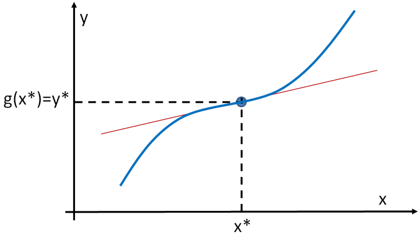
## Äquivalentes Problem: Auswertung der Umkehrfunktion

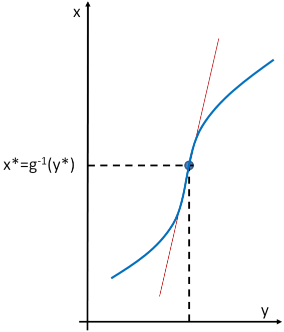
### Gegeben:

Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\quad g : I \to \mathbb{R}$, $\quad y^* \in V$ mit $g'(x^*) \neq 0$.

### Problem:

$(*)$ Auswertung von $g^{-1} : V \to \mathbb{R}$ an der Stelle $y^* \in V$.



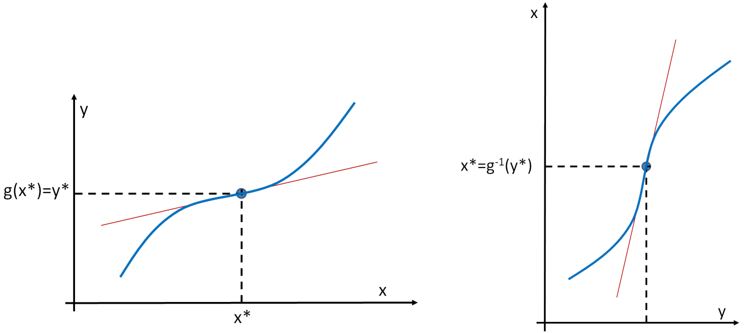



# Absolute Kondition der Umkehrfunktion

## Lemma

*Es sei* $g \in C^1(a,b)$, $g(x) = y$ *und* $g'(x) \neq 0$. *Dann ist* $g^{-1}$ *differenzierbar in* $y$ *und es gilt*

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)}.$$



## Satz

*Es sei* $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ *und* $g'(x^*) \neq 0$. *Dann ist die* *absolute Kondition* $\kappa_{abs}$ *der Lösung von*

$$x^* \in I : \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite* $y^*$ *gegeben durch*

$$\kappa_{abs} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

# Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

**Satz**

*Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die* ***absolute Kondition*** *$\kappa_{abs}$ der Lösung von*

$$x^* \in I: \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite $y^*$ gegeben durch*

$$\kappa_{abs} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$.

# Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

## Satz

*Es sei* $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ *und* $g'(x^*) \neq 0$. *Dann ist die* ***absolute Kondition*** $\kappa_{abs}$ *der Lösung von*

$$x^* \in I: \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite* $y^*$ *gegeben durch*

$$\kappa_{abs} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$. $\quad x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$,

# Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

**Satz**

*Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die absolute Kondition $\kappa_{abs}$ der Lösung von*

$$x^* \in I : \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite $y^*$ gegeben durch*

$$\kappa_{abs} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$. $\quad x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$, $\quad \kappa_{\mathsf{abs}} = \frac{1}{a}$.

## Definition (Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen)

Die relative Kondition $\kappa_{\text{rel}}$ von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|y^* - y|}{|y^*|} + o(|y^* - y|) \qquad \text{für } y \to y^*$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu $y^*$ und den zugehörigen Lösungen $x$ des gestörten Problems

$$x \in I: \qquad g(x) = y.$$

Existiert keine solche Zahl $\kappa_{\text{rel}}$, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

# Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen

**Satz**

*Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die relative Kondition $\kappa_{rel}$ der Lösung von*

$$x^* \in I : \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite $y^*$ gegeben durch*

$$\kappa_{rel} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|}.$$

### Satz

*Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die* *relative Kondition* $\kappa_{rel}$ *der Lösung von*

$$x^* \in I : \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite $y^*$ gegeben durch*

$$\kappa_{rel} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$.

# Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen

## Satz

*Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die relative Kondition $\kappa_{rel}$ der Lösung von*

$$x^* \in I : \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite $y^*$ gegeben durch*

$$\kappa_{rel} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$. $\quad x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$,

# Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen

### Satz

*Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die relative Kondition $\kappa_{rel}$ der Lösung von*

$$x^* \in I : \qquad g(x^*) = y^*$$

*bei Störung der rechten Seite $y^*$ gegeben durch*

$$\kappa_{rel} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$. $\quad x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$, $\quad \kappa_{\text{rel}} = \frac{|ax^*|}{|x^*||a|} = 1$.

Geforderte relative Genauigkeit: $\mathrm{err} := \frac{|x-x^*|}{|x^*|} \leq \mathrm{Tol}.$

- Hinreichend: $\mathrm{err} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}\, \mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}) \leq \mathrm{Tol}$

# Grenzen der Genauigkeit

Geforderte relative Genauigkeit: $\mathrm{err} := \frac{|x - x^*|}{|x^*|} \leq \mathrm{Tol}.$

- Hinreichend: $\mathrm{err} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}\,\mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}) \leq \mathrm{Tol}$

"Gut" konditioniert: $\kappa_{\mathsf{rel}} \leq \frac{\mathrm{Tol}}{\mathrm{eps}} + o(1)$

- Genauigkeitskriterium erfüllt $\mathrm{err} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}\,\mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}) \leq \mathrm{Tol}$

Geforderte relative Genauigkeit: $\mathrm{err} := \frac{|x-x^*|}{|x^*|} \leq \mathrm{Tol}.$

- Hinreichend: $\mathrm{err} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}\, \mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}) \leq \mathrm{Tol}$

"Gut" konditioniert: $\kappa_{\mathsf{rel}} \leq \frac{\mathrm{Tol}}{\mathrm{eps}} + o(1)$

- Genauigkeitskriterium erfüllt $\mathrm{err} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}\, \mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}) \leq \mathrm{Tol}$

"Schlecht" konditioniert: $\kappa_{\mathsf{rel}} \geq \frac{\mathrm{Tol}}{\mathrm{eps}} + o(1)$

- Genauigkeitskriterium nicht erfüllt, falls $\mathrm{err} = \kappa_{\mathsf{rel}}\, \mathrm{eps} \geq \mathrm{Tol}$

Geforderte relative Genauigkeit: $\mathrm{err} := \frac{|x-x^*|}{|x^*|} \leq \mathrm{Tol}.$

- Hinreichend: $\mathrm{err} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}\,\mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}) \leq \mathrm{Tol}$

"Gut" konditioniert: $\kappa_{\mathsf{rel}} \leq \frac{\mathrm{Tol}}{\mathrm{eps}} + o(1)$

- Genauigkeitskriterium erfüllt $\mathrm{err} \leq \kappa_{\mathsf{rel}}\,\mathrm{eps} + o(\mathrm{eps}) \leq \mathrm{Tol}$

"Schlecht" konditioniert: $\kappa_{\mathsf{rel}} \geq \frac{\mathrm{Tol}}{\mathrm{eps}} + o(1)$

- Genauigkeitskriterium nicht erfüllt, falls $\mathrm{err} = \kappa_{\mathsf{rel}}\,\mathrm{eps} \geq \mathrm{Tol}$

Genauigkeitsschranke: $\mathrm{Tol} \geq \kappa_{\mathsf{rel}}\,\mathrm{eps}$

# Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Freie Universität Berlin

## Problem

$$x^* \in (0,\pi): \qquad g(x^*) = y^*, \qquad g(x) = \exp\left(\frac{1}{\gamma}\tan(x-1)\right), y^* = 1$$

**Lösung:** $x^* = 1$

## Kondition

$$g'(x) = g(x)\frac{1}{\gamma}\left(1+\tan(x)^2\right), \qquad \kappa_{\mathsf{rel}} = \frac{1}{|g'(x^*)|} = \gamma.$$

**Genauigkeitsschranke:** $\kappa_{\mathsf{rel}}\,\mathrm{eps} = \gamma\,\mathrm{eps}$