Computerorientierte Mathematik I

7. Vorlesung

Carsten Gräser

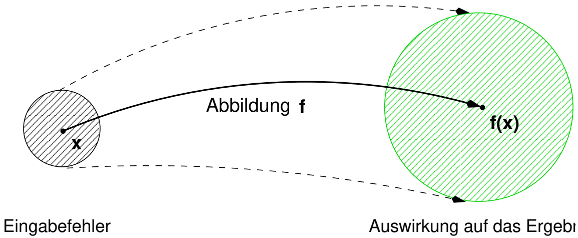
Freie Universität Berlin

29.11.2019

Kondition nichtlinearer Gleichungen

Problem: Finde x^*, so dass $g(x^*) = y^*$

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

Freie Universität Berlin

Problem:

Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$

- mit Parameter $a = 4\,999\,999$,
- an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$

```
>>> x0=10000000.0
>>> def f1(x): x**3 + 12*a**2*x - 6*a*x**2 -8*a**3
>>> f1(x0)
```

Auswertung eines Polynoms

Problem:

Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$

- mit Parameter $a = 4\,999\,999$,
- an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$

```
>>> x0=10000000.0
>>> def f1(x): x**3 + 12*a**2*x - 6*a*x**2 -8*a**3
>>> f1(x0)
393216.0
```

Freie Universität Berlin

Problem:

Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$

- mit Parameter $a = 4\,999\,999$,
- an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$

```
>>> x0=10000000.0
>>> def f1(x): x**3 + 12*a**2*x - 6*a*x**2 -8*a**3
>>> f1(x0)
393216.0
>>> def f2(x): (x-2*a)**3
>>> f2(x0)
8.0
```

Freie Universität Berlin

Problem:

Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x-2a)^3$

- mit Parameter $a = 4\,999\,999$,
- an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$

```
>>> x0=10000000.0
>>> def f1(x): x**3 + 12*a**2*x - 6*a*x**2 -8*a**3
>>> f1(x0)
393216.0
>>> def f2(x): (x-2*a)**3
>>> f2(x0)
8.0
```

Was ist hier passiert?

Erinnerung: Computer können nicht rechnen

Äquivalente Umformungen in $\mathbb{R}$ sind in Gleitkommaarithmetik nicht äquivalent.

Beispiel:

- keine binomische Formel

$$(a \mathbin{\tilde{+}} b) \mathbin{\tilde{*}} (a \mathbin{\tilde{+}} b) \quad \neq \quad a \mathbin{\tilde{*}} a \mathbin{\tilde{+}} 2 \mathbin{\tilde{*}} a \mathbin{\tilde{*}} b \mathbin{\tilde{+}} b \mathbin{\tilde{*}} b$$

- kein Assoziativgesetz

$$(a \mathbin{\tilde{*}} a \mathbin{\tilde{+}} 2 \mathbin{\tilde{*}} a \mathbin{\tilde{*}} b) \mathbin{\tilde{+}} b \mathbin{\tilde{*}} b \quad \neq \quad a \mathbin{\tilde{*}} a \mathbin{\tilde{+}} (2 \mathbin{\tilde{*}} a \mathbin{\tilde{*}} b \mathbin{\tilde{+}} b \mathbin{\tilde{*}} b)$$

Gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ (g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1)(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$

Gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ (g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1)(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$

Beispiel:

$$f(x) = ax_0 + b = (g_2 \circ g_1)(x_0), \qquad g_1(x_0) = ax_0, \qquad g_2(y) = y + b$$

Gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ (g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1)(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$

Beispiel:

$$f(x) = ax_0 + b = (g_2 \circ g_1)(x_0), \qquad g_1(x_0) = ax_0, \qquad g_2(y) = y + b$$

$$f(x) = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = (h_2 \circ h_1)(x_0), \qquad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}, \qquad h_2(y) = a * y$$

Gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ (g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1)(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$

Beispiel:

$$f(x) = ax_0 + b = (g_2 \circ g_1)(x_0), \qquad g_1(x_0) = ax_0, \qquad g_2(y) = y + b$$

$$f(x) = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = (h_2 \circ h_1)(x_0), \qquad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}, \qquad h_2(y) = a * y$$

Welcher Algorithmus ist besser?

Gegeben:

Ein Algorithmus zur Auswertung von f an der Stelle x_0:

$$f(x_0) = g_n \circ (g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1)(x_0)$$

Gegeben:

Ein Algorithmus zur Auswertung von f an der Stelle x_0:

$$f(x_0) = g_n \circ (g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1)(x_0)$$

Realisierung im Rechner:

Auswertungsfehler

$$\tilde{f}(x_0) = \tilde{g}_n \circ (\tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1)(x_0)$$

Gegeben:

Ein Algorithmus zur Auswertung von f an der Stelle x_0:

$$f(x_0) = g_n \circ (g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1)(x_0)$$

Realisierung im Rechner:

Auswertungsfehler

$$\tilde{f}(x_0) = \tilde{g}_n \circ (\tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1)(x_0)$$

... durch Runden nach jeder Elementaroperation:

$$\tilde{g}_i(y) = (1 + \varepsilon_i) g_i(y), \qquad |\varepsilon_i| \le \text{eps}, \qquad i = 1, \dots, n, \qquad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

Merksatz

Verschiedene Algorithmen führen zu verschiedenen Ergebnissen.

Algorithmus A:

$$f(x) = ax_0 + b = (g_2 \circ g_1)(x_0), \qquad g_1(x_0) = ax_0, \qquad g_2(y) = y + b$$

Algorithmus B:

$$f(x) = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = (h_2 \circ h_1)(x_0), \qquad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}, \qquad h_2(y) = a * y$$

Freie Universität Berlin

Relative Stabilität: Auswirkung von Gleitkommarechnung

Notation:

- $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ gegeben
- Wir setzen $\|\varepsilon\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\varepsilon_i|$

Definition

Die relative Stabilität σ_{rel} des Algorithmus'

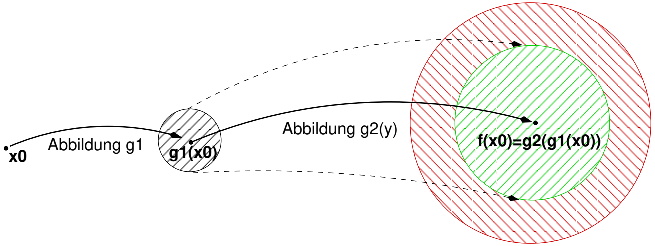
$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \neq 0$$

gegenüber Rundungsfehlern $\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1+\varepsilon_i)$ mit $|\varepsilon_i| \leq \mathrm{eps}$ ist die kleinste Zahl σ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\mathsf{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|).$$

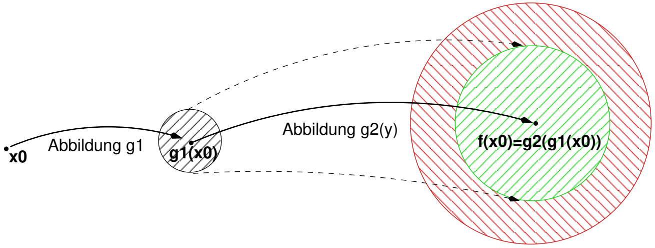
Liegt dies für keine reelle Zahl σ_{rel} vor, so wird $\sigma_{\mathsf{rel}} = \infty$ gesetzt.

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis



Freie Universität Berlin

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis



Die Stabilität ist eine Eigenschaft des Algorithmus!

Beispiel

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0)\\ &= (1+\varepsilon_3)\Big(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)\big(\tfrac{1}{2}(1 - (1+\varepsilon_1)\cos(2\pi))\big)}\Big)\end{aligned}$$

Freie Universität Berlin

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\
&= (1 + \varepsilon_3)\Big(1 + \sqrt{(1 + \varepsilon_2)\big(\tfrac{1}{2}(1 - (1 + \varepsilon_1)\cos(2\pi))\big)}\Big) \\
&= (1 + \varepsilon_3)\Big(1 + \sqrt{(1 + \varepsilon_2)\big(\tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1)\big)}\Big)
\end{aligned}$$

Beispiel

Freie Universität Berlin

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\
&= (1+\varepsilon_3)\Big(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)\big(\tfrac{1}{2}(1 - (1+\varepsilon_1)\cos(2\pi))\big)}\Big) \\
&= (1+\varepsilon_3)\Big(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)\big(\tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1)\big)}\Big)
\end{aligned}$$

Nicht reell auswertbar für beliebig kleine $\varepsilon_1 > 0$: $\sigma_{\text{rel}} = \infty$

Satz (7.9)

Es sei $f(x_0) \neq 0$ *sowie* $g(x_0), h(x_0) \neq 0$ *und*

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0), \qquad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ *und* $h(x_0)$ *mit relativen Stabilitäten* $\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)$*. Dann gilt jeweils für die Algorithmen* f_i*:*

$$f_1(x_0) = g(x_0) + h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_1) \leq 1 + \max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_2(x_0) = g(x_0) - h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_2) \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_3(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_3) \leq 1 + 2\max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_4(x_0) = g(x_0)/h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_4) \leq 1 + 2\max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0), h(x_0) > 0$ *vorausgesetzt ist.*

Satz (7.8)

Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0), \qquad y_i = g_i(y_{i-1}), \qquad y_0 = x_0.$$

Dann gilt

$$\sigma_{rel} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)).$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsanfang ($n = 1$)

Trivialer Algorithmus:

Sei

$$f(x_0) = g_1(x_0).$$

Dann gilt

$$\sigma_{\mathsf{rel}} = 1,$$

denn

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} = \frac{|f(x_0) - (1 + \varepsilon) f(x_0)|}{|f(x_0)|} = |\varepsilon|.$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsschluss $(n \Rightarrow n+1)$

Satz (7.6)

Sei

$$y = h(x_0) = g_{n_1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

und die Stabilität des Algorithmus sei σ_h*, d.h.,*

$$\frac{|h(x_0) - \tilde{h}(\varepsilon, x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \sigma_h \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|).$$

Sei weiter $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$ *wobei* κ_n *die Kondition von* g_n *ist.*

Dann gilt für die Stabilität σ_{rel} *von* $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$

$$\sigma_{rel} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)).$$

Satz (7.8)

Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0), \qquad y_i = g_i(y_{i-1}), \qquad y_0 = x_0.$$

Dann gilt

$$\sigma_{\mathit{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)).$$

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen verschlechtern die Stabilität!

Freie Universität Berlin

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi - \varepsilon$$

Beispiel

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi - \varepsilon$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi - \varepsilon$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta}$$

Beispiel

Freie Universität Berlin

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi - \varepsilon$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1 - \delta}{\delta}$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1 + \sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2 + \sqrt{2\delta}}$$

Beispiel

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi - \varepsilon$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta}$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1 + \sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2 + \sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\sigma_{\text{rel}} = 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2)$

Problem: Auswertung von

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}, \qquad x_0 = 2\pi - \varepsilon$$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x_0), \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \qquad g_3(y_1) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1 - \delta}{\delta}$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1 + \sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2 + \sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\sigma_{\text{rel}} = 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2)$

Beliebig große Schranke: $1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \geq \frac{1-\delta}{6\sqrt{\delta}} \to \infty$ für $\varepsilon \to 0$.

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

Freie Universität Berlin

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

Einsetzen liefert

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin(\frac{x_0}{2})$$

Freie Universität Berlin

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

Einsetzen liefert

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin(\tfrac{x_0}{2})$$

Neuer Algorithmus

$$f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0), \qquad y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}, \qquad h_2(y) = 1 + \sin(y)$$

Freie Universität Berlin

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

Einsetzen liefert

$$f(x_0) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin(\tfrac{x_0}{2})$$

Neuer Algorithmus

$$f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0), \qquad y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}, \qquad h_2(y) = 1 + \sin(y)$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\sigma_{\mathsf{rel}} \leq 1 + \kappa_2 = 1 + \frac{|y||\cos(y)|}{|1+\sin(y)|} \to 1 + \pi$

Numerisches Experiment mit Python

```
>>> x0 = 2*3.1415926
>>> def fg(x): return 1.0 + sqrt((1.0 - cos(x))/2.0)
>>> fg(x0)
1.0000000537269007
```

```
>>> x0 = 2*3.1415926
>>> def fg(x): return 1.0 + sqrt((1.0 - cos(x))/2.0)
>>> fg(x0)
1.0000000537269007

>>> def fh(x): return 1.0 + sin(x/2.0)
>>> fh(x0)
1.0000000535897933
```

```
>>> x0 = 2*3.1415926
>>> def fg(x): return 1.0 + sqrt((1.0 - cos(x))/2.0)
>>> fg(x0)
1.0000000537269007

>>> def fh(x): return 1.0 + sin(x/2.0)
>>> fh(x0)
1.0000000535897933

>>> eps = finfo(double).eps
>>> abs(fg(x0)-fh(x0))/abs(fh(x0)*eps)
617476.966909537
```

Freie Universität Berlin

Stabilitätsanalyse von f_g: $\sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

Satz (7.8)

Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0), \qquad y_i = g_i(y_{i-1}), \qquad y_0 = x_0.$$

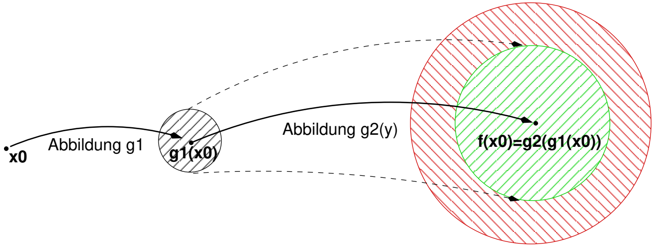
Dann gilt

$$\sigma_{rel} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)).$$

κ_1 geht nicht in die Abschätzung ein!

Freie Universität Berlin

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis



Merksatz

Freie Universität Berlin

Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!