Computerorientierte Mathematik I

8. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

06.12.2019

Freie Universität Berlin

Rückblick: Vorlesung vom 29.11.2019

Stabilitätsanalyse

Stabilität

- Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs, Abgrenzung zur Kondition
- Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung
- Definition und Beispiele

Stabilitätsabschätzungen

- Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität
- Grundrechenarten (Satz 7.9) und Elementarfunktionen (Satz 7.8)
- Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!
- Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!
- Beispiel: Polynom-Desaster

Freie Universität Berlin

Problem:

Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$

- mit Parameter $a = 4\,999\,999$,
- an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$

```
>>> x0=10000000.0
>>> def f1(x): x**3 + 12*a**2*x - 6*a*x**2 -8*a**3
>>> f1(x0)
```

Auswertung eines Polynoms

Problem:

Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$

- mit Parameter $a = 4\,999\,999$,
- an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$

```
>>> x0=10000000.0
>>> def f1(x): x**3 + 12*a**2*x - 6*a*x**2 -8*a**3
>>> f1(x0)
393216.0
```

Auswertung eines Polynoms

Problem:

Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$

- mit Parameter $a = 4\,999\,999$,
- an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$

```
>>> x0=10000000.0
>>> def f1(x): x**3 + 12*a**2*x - 6*a*x**2 -8*a**3
>>> f1(x0)
393216.0
>>> def f2(x): (x-2*a)**3
>>> f2(x0)
8.0
```

Relative Stabilität: Auswirkung von Gleitkommarechnung

Notation:

- $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ gegeben
- Wir setzen $\|\varepsilon\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\varepsilon_i|$

Definition

Die relative Stabilität σ_{rel} des Algorithmus'

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \neq 0$$

gegenüber Rundungsfehlern $\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i)$ mit $|\varepsilon_i| \leq \text{eps}$ ist die kleinste Zahl σ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|).$$

Liegt dies für keine reelle Zahl σ_{rel} vor, so wird $\sigma_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

Satz (7.8)

Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0), \qquad y_i = g_i(y_{i-1}), \qquad y_0 = x_0.$$

Dann gilt

$$\sigma_{rel} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)).$$

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen verschlechtern die Stabilität!

Satz (7.9)

Es sei $f(x_0) \neq 0$ *sowie* $g(x_0), h(x_0) \neq 0$ *und*

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0), \qquad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ *und* $h(x_0)$ *mit relativen Stabilitäten* $\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)$. *Dann gilt jeweils für die Algorithmen* f_i:

$$f_1(x_0) = g(x_0) + h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_1) \leq 1 + \max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_2(x_0) = g(x_0) - h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_2) \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_3(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_3) \leq 1 + 2\max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_4(x_0) = g(x_0)/h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_4) \leq 1 + 2\max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0), h(x_0) > 0$ *vorausgesetzt ist.*

Freie Universität Berlin

Algorithmus 1

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$
$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x_0^3 + 12a^2x_0, \qquad g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke $\sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0)$$

$$h_1(x) = x_0 - 2a, \qquad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

Beobachtete Fehlerverstärkung $|8 - 393216|/(8\,\mathrm{eps}) \approx 2.2 \cdot 10^{20}$

Eingabefehler und Auswertungsfehler: Gesamtfehler

Gegeben

- Eingabefehler: $\frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$
- max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

Resultierender Gesamtfehler: $\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x_0})|}{|f(x_0)|}$

Satz (7.5)

Es sei $x_0 \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$, g_i stetig differenzierbar und ε genügend klein. Dann gilt

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x_0})|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{rel} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma_{rel} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x_0}| + \|\varepsilon\|).$$

- σ_{rel} : *Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle* x_0
- κ_{rel} : *rel. Kondition der Auswertung von* f *an der Stelle* x_0

Faustregel

$$\text{Gesamtfehler} = \kappa_{\text{rel}} \cdot \text{Eingabefehler} + \sigma_{\text{rel}} \cdot \text{Auswertungsfehler!}$$

$$f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$$

Relative Kondition

$$\kappa_{\text{rel}} = |f'(x_0)| \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} = 3(x_0 - 2a)^2 \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} = 12 \frac{10^7}{8} = \frac{3}{2} 10^7$$

Freie Universität Berlin

Algorithmus 1

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\
&= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)
\end{aligned}
$$

$$
g_1(x) = x_0^3 + 12a^2x_0, \qquad g_2(x_0) = 6ax_0^2 + 8a^3
$$

Stabilitätsschranke $\sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2

$$
f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0)
$$

$$
h_1(x) = x_0 - 2a, \qquad h_2(y_1) = y_1^3
$$

Stabilitätsschranke $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

Freie Universität Berlin

Algorithmus 1

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x_0})|}{|f(x_0)|} \leq \frac{3}{2} 10^7 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 10^{21} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x_0}| + \|\varepsilon\|).$$

Algorithmus 2

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x_0})|}{|f(x_0)|} \leq \frac{3}{2} 10^7 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 4\|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x_0}| + \|\varepsilon\|).$$

Numerisches Beispiel: keine Eingabefehler $x_0 = \tilde{x}_0 = 2$

Systematische Stabilitätsanalyse

Problem:

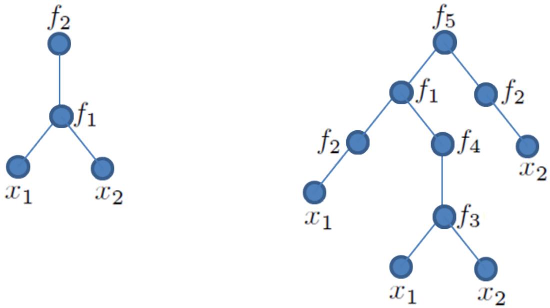
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = (x_1^2 - 2(x_1 x_2)) + x_2^2$$

Algorithmus 1: $f(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$

$$f_1(x, y) = x - y, \qquad f_2(x) = x^2$$

Algorithmus 2: $f(x_1, x_2) = f_5(f_1(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))), f_2(x_2))$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

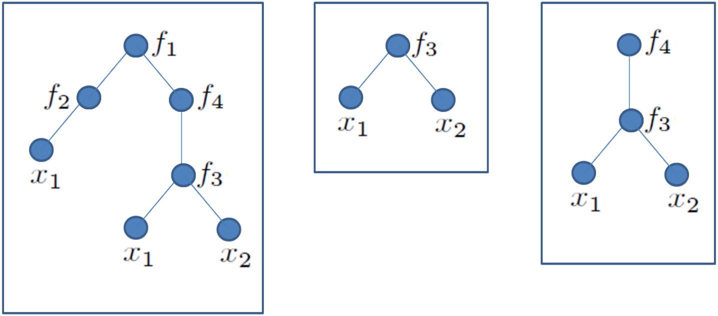


Algorithmus 1: $f(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$

Algorithmus 2: $f(x_1, x_2) = f_5(f_1(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))), f_2(x_2))$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Teilbäume



Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäumen

Auswertungsbaum: Wurzelbaum β

- Baum: zusammenhängender, kreisfreier Graph (Knoten, Kanten)
- Wurzelbaum: ausgezeichneter Knoten, alle Kanten zeigen zur Wurzel
- Wurzel: nur eingehende Kanten
- Blatt: nur ausgehende Kante
- Anzahl Knoten: $\#\beta$

Teilbäume

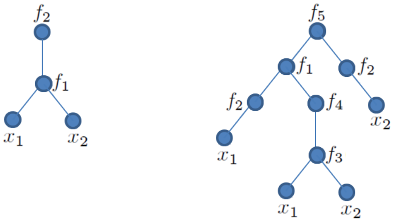
- β_i entsteht durch Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

Zerlegung in Teilbäume

- Familie von Teilbäumen: $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m]$ (bei uns immer $m \in \{1, 2\}$)
- Gesamtzahl von Knoten: $\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \cdots + \#\beta_m$

Trivialer Baum

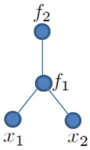
- Nur ein Knoten (seine Wurzel)
- $\beta = []$ mit $\#\beta = 1$

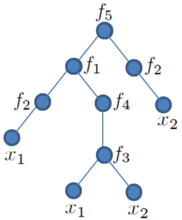


Teilbäume

$$\beta_0 = [\beta_1],$$
$$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}],$$
$$\beta_{21} = [], \qquad \beta_{22} = [].$$

- Blätter $\beta_{21} = []$ und $\beta_{22} = []$ stehen für die Eingaben x_1, x_2
- Wurzel β steht für die Ausgabe





Teilbäume

$$\beta_0 = [\beta_{11}, \beta_{12}],$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \qquad \beta_{12} = [\beta_{23}]$$

$$\beta_{21} = [\beta_{31}], \qquad \beta_{22} = [\beta_{32}], \qquad \beta_{23} = [],$$

$$\beta_{31} = [], \qquad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}],$$

$$\beta_{41} = [], \qquad \beta_{42} = []$$

- Blätter β_{31}, β_{41} und β_{42}, β_{23} stehen für die Eingaben x_1, x_2
- Wurzel β steht für die Ausgabe

Zwischenergebnisse mittels Auswertungsbäumen

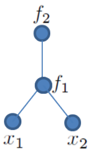
Zuordnung von Elementarfunktionen und Eingabedaten

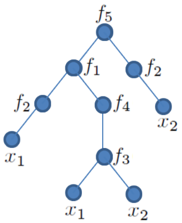
- Eingabewert $\longleftrightarrow$ Blatt
- Elementarfunktion $\longleftrightarrow$ innerer Knoten

Zeischenergebnisse für jeden Teilbaum β

- Zwischenfunktion in Wurzel f^β
- Zwischenergebnis in Wurzel z^β

$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{, falls } \beta = [\,], \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}) & \text{, falls } \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$





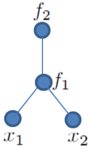
Teilbäume

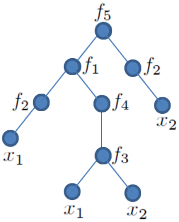
$$\beta_0 = [\beta_1],$$

$$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}],$$

$$\beta_{21} = [], \qquad \beta_{22} = []$$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{21}} = x_1,\ z^{\beta_{22}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_2,\ f^{\beta_1} = f_1$





Teilbäume

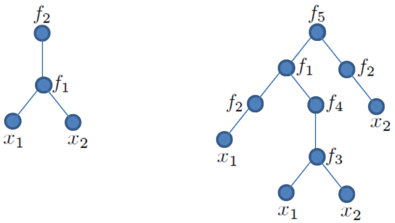
$$\beta_0 = [\beta_1],$$

$$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}],$$

$\beta_{21} = [],$ $\beta_{22} = []$ $z^{\beta_{21}} = x_1,$ $\beta_{22} = x_2$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{21}} = x_1,\ z^{\beta_{22}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_2,\ f^{\beta_1} = f_1$

Algorithmus 1



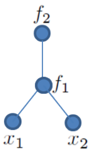
Teilbäume

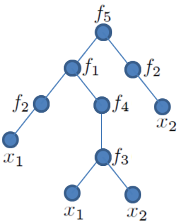
$$\beta_0 = [\beta_1],$$

$$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}], \qquad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}),$$

$$\beta_{21} = [], \qquad \beta_{22} = [] \qquad z^{\beta_{21}} = x_1, \qquad \beta_{22} = x_2$$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{21}} = x_1$, $z^{\beta_{22}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_2$, $f^{\beta_1} = f_1$





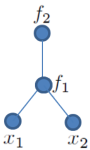
Teilbäume

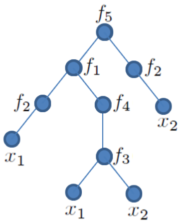
$$\beta_0 = [\beta_1], \qquad z^{\beta_0} = f_2(z^{\beta_1}),$$

$$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}], \qquad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}),$$

$$\beta_{21} = [], \qquad \beta_{22} = [] \qquad z^{\beta_{21}} = x_1, \qquad \beta_{22} = x_2$$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{21}} = x_1$, $z^{\beta_{22}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_2$, $f^{\beta_1} = f_1$





Teilbäume

$\beta_0 = [\beta_{11}, \beta_{12}],$

$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}],\quad \beta_{12} = [\beta_{23}],$

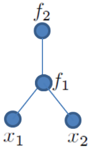
$\beta_{21} = [\beta_{31}],\quad \beta_{22} = [\beta_{32}],\quad \beta_{23} = [],$

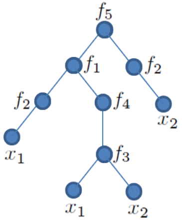
$\beta_{31} = [],\quad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}],$

$\beta_{41} = [],\quad \beta_{42} = []$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{23}} = x_2,\ z^{\beta_{31}} = x_1,\ z^{\beta_{41}} = x_1,\ z^{\beta_{42}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_5,\ f^{\beta_{11}} = f_1,\ f^{\beta_{12}} = f_2,\ f^{\beta_{21}} = f_2,\ f^{\beta_{22}} = f_4,\ f^{\beta_{32}} = f_3$

Algorithmus 2





Teilbäume

$\beta_0 = [\beta_{11}, \beta_{12}]$,

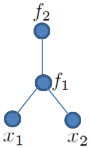
$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}]$, $\beta_{12} = [\beta_{23}]$,

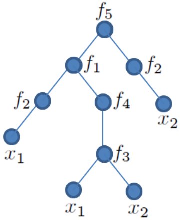
$\beta_{21} = [\beta_{31}]$, $\beta_{22} = [\beta_{32}]$, $\beta_{23} = []$,

$\beta_{31} = []$, $\beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}]$,

$\beta_{41} = []$, $\beta_{42} = []$ $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{23}} = x_2$, $z^{\beta_{31}} = x_1$, $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_5$, $f^{\beta_{11}} = f_1$, $f^{\beta_{12}} = f_2$, $f^{\beta_{21}} = f_2$, $f^{\beta_{22}} = f_4$, $f^{\beta_{32}} = f_3$





Teilbäume

$\beta_0 = [\beta_{11}, \beta_{12}]$,

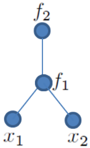
$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}]$, $\beta_{12} = [\beta_{23}]$,

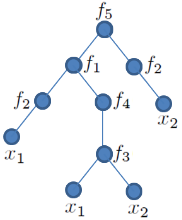
$\beta_{21} = [\beta_{31}]$, $\beta_{22} = [\beta_{32}]$, $\beta_{23} = []$,

$\beta_{31} = []$, $\beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}]$, $z^{\beta_{31}} = x_1$, $z^{\beta_{32}} = f_3(z^{\beta_{41}}, z^{\beta_{42}})$,

$\beta_{41} = []$, $\beta_{42} = []$ $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{23}} = x_2$, $z^{\beta_{31}} = x_1$, $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_5$, $f^{\beta_{11}} = f_1$, $f^{\beta_{12}} = f_2$, $f^{\beta_{21}} = f_2$, $f^{\beta_{22}} = f_4$, $f^{\beta_{32}} = f_3$





Teilbäume

$\beta_0 = [\beta_{11}, \beta_{12}]$,

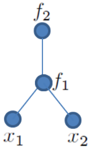
$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}]$, $\beta_{12} = [\beta_{23}]$,

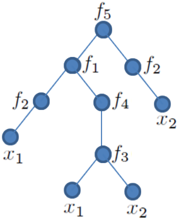
$\beta_{21} = [\beta_{31}]$, $\beta_{22} = [\beta_{32}]$, $\beta_{23} = []$, $z^{\beta_{21}} = f_2(z^{\beta_{31}})$, $z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}})$, $z^{\beta_{23}} = x_2$,

$\beta_{31} = []$, $\beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}]$, $z^{\beta_{31}} = x_1$, $z^{\beta_{32}} = f_3(z^{\beta_{41}}, z^{\beta_{42}})$,

$\beta_{41} = []$, $\beta_{42} = []$ $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{23}} = x_2$, $z^{\beta_{31}} = x_1$, $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_5$, $f^{\beta_{11}} = f_1$, $f^{\beta_{12}} = f_2$, $f^{\beta_{21}} = f_2$, $f^{\beta_{22}} = f_4$, $f^{\beta_{32}} = f_3$





Teilbäume

$$\beta_0 = [\beta_{11}, \beta_{12}],$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}], \qquad z^{\beta_{11}} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}), \quad z^{\beta_{12}} = f_2(z^{\beta_{23}}),$$

$$\beta_{21} = [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad \beta_{23} = [], \qquad z^{\beta_{21}} = f_2(z^{\beta_{31}}), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{23}} = x_2,$$

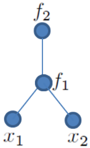
$$\beta_{31} = [], \quad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}], \qquad z^{\beta_{31}} = x_1, \quad z^{\beta_{32}} = f_3(z^{\beta_{41}}, z^{\beta_{42}}),$$

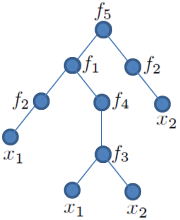
$$\beta_{41} = [], \quad \beta_{42} = [] \qquad z^{\beta_{41}} = x_1, \quad z^{\beta_{42}} = x_2$$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{23}} = x_2$, $z^{\beta_{31}} = x_1$, $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_5$, $f^{\beta_{11}} = f_1$, $f^{\beta_{12}} = f_2$, $f^{\beta_{21}} = f_2$, $f^{\beta_{22}} = f_4$, $f^{\beta_{32}} = f_3$

Algorithmus 2

Freie Universität Berlin





Teilbäume

$\beta_0 = [\beta_{11}, \beta_{12}],$

$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}],$

$\beta_{21} = [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad \beta_{23} = [],$

$\beta_{31} = [], \quad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}],$

$\beta_{41} = [], \quad \beta_{42} = []$

$z^{\beta_0} = f^5(z^{\beta_{11}}, z^{\beta_{12}}),$

$z^{\beta_{11}} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}), \quad z^{\beta_{12}} = f_2(z^{\beta_{23}}),$

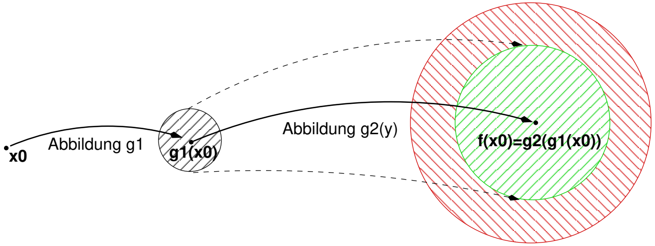
$z^{\beta_{21}} = f_2(z^{\beta_{31}}), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{23}} = x_2,$

$z^{\beta_{31}} = x_1, \quad z^{\beta_{32}} = f_3(z^{\beta_{41}}, z^{\beta_{42}}),$

$z^{\beta_{41}} = x_1, \quad z^{\beta_{42}} = x_2$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{23}} = x_2$, $z^{\beta_{31}} = x_1$, $z^{\beta_{41}} = x_1$, $z^{\beta_{42}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_5$, $f^{\beta_{11}} = f_1$, $f^{\beta_{12}} = f_2$, $f^{\beta_{21}} = f_2$, $f^{\beta_{22}} = f_4$, $f^{\beta_{32}} = f_3$

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis



Satz (7.6)

Sei $h : I \to I_g \subset \mathbb{R}$, $g : I_g \to \mathbb{R}$, $f = g \circ h : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. *Der Algorithmus*

$$h(x_0) = h_{n_1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

zur Auswertung von $h(x_0)$ *habe die Stabilität* σ_h. *Die Kondition der Auswertung von* $g(y_0)$ *mit* $y_0 = h(x_0)$ *sei* κ_g. *Dann gilt für den Algorithmus*

$$f(x_0) = g \circ h_{n_1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

die Stabilitätsschranke $\sigma_f \le 1 + \kappa_g \sigma_h$

Satz (7.9)

Es sei $f(x_0) \neq 0$ *sowie* $g(x_0), h(x_0) \neq 0$ *und*

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0), \qquad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ *und* $h(x_0)$ *mit relativen Stabilitäten* $\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)$*. Dann gilt jeweils für die Algorithmen* f_i*:*

$$f_1(x_0) = g(x_0) + h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_1) \leq 1 + \max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_2(x_0) = g(x_0) - h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_2) \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_3(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_3) \leq 1 + 2\max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

$$f_4(x_0) = g(x_0)/h(x_0), \quad \sigma_{rel}(f_4) \leq 1 + 2\max\{\sigma_{rel}(g), \sigma_{rel}(h)\},$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0), h(x_0) > 0$ *vorausgesetzt ist.*

Rekursive Abschätzung der Fehlerverstärkung

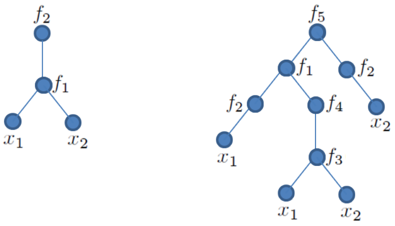
Zwischenergebnis

$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{, falls } \beta = [\,], \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}) & \text{, falls } \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

Fehlerverstärkung für den Teilbaum

$$\sigma^\beta \leq \begin{cases} 0 & \text{, falls } \beta = [\,], \\ 1 + \kappa(f^\beta) \max\{\sigma^{\beta_1}, \ldots, \sigma^{\beta_m}\} & \text{, falls } \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

$\kappa(f^\beta)$: relative Kondition der Auswertung von f^β in $z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}$



Teilbäume

$$\beta_0 = [\beta_1], \qquad z^{\beta_0} = f_2(z^{\beta_1}),$$

$$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}], \qquad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}),$$

$$\beta_{21} = [], \qquad \beta_{22} = [] \qquad z^{\beta_{21}} = x_1, \qquad z^{\beta_{22}} = x_2$$

- Werte in den Blättern: $z^{\beta_{21}} = x_1$, $z^{\beta_{22}} = x_2$
- Zwischenfunktionen: $f^{\beta_0} = f_2$, $f^{\beta_1} = f_1$