Computerorientierte Mathematik I

11. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

10.01.2020

Freie Universität Berlin

Aufwand und Komplexität

Komplexität und Effizienz

- Aufwand: Anzahl dominanter Operationen (worst-case), Beispiel
- Landau-Symbole $O(n)$, Beispiel
- Definition: Aufwand eines Algorithmus, Komplexität eines Problems

Sortieren

- Aufwand: TumbSort, BubbleSort und MergeSort. Komlexität

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $a \geq b$ $(ggT(a, b))$

- Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand $O(b)$ Divisionen
- Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand $O(b)$ Divisionen (worst-case!)
- Strukturelle Einsicht: Kongruenz (Gauß 1801), Rekursionssatz
- Euklidischer Algorithmus: Aufwand: $O(\log(b))$ Divisionen

Problem: Eingabedaten und Komplexität

- Kondition: Wie wirken sich Eingabefehler aus?
- Komplexität: Was ist der minimale Aufwand um das Problem zu lösen?

Algorithmen: Auswertungsfehler und Komplexität

- Stabilität: Wie wirken sich Auswertungsfeher in meinem Algorithmus aus?
- Aufwand: Wie aufwendig ist mein Algorithmus?

$n = 3$ Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & +8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & +8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} x_3 \qquad = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & +8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$n = 3$ Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\
2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\
3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0
\end{array}
$$

$n = 3$ Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad\qquad x = b$$

Freie Universität Berlin

Matrix-Vektor-Produkt

- Matrix $A = (A_{i,i})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n\times n}$
- Vektor $x = (x_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n}$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n}, \qquad (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

Matrixprodukt

- Matrix $A = (A_{i,i})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n\times n}$
- Matrix $B = (B_{i,i})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n\times n}$

$$AB = ((AB)_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung

- Diskrete stationäre Prozesse

Diskretisierung

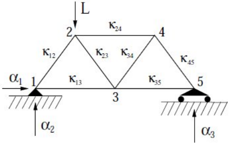
...mathematischer Modelle kontinuierlicher Prozesse

- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Partielle Differentialgleichungen
- ...

Linearisierung

- Newton-Verfahren
- Lösung von Optimierungsproblemen
- ...

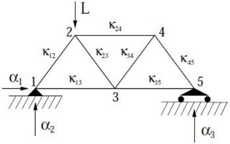
Brückenkonstruktion



- Gegeben: Knoten P_i, Last L
- Gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Beispiel: Lineares Stabwerk

Brückenkonstruktion



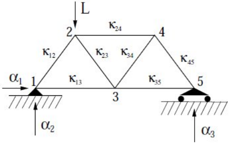
- Gegeben: Knoten P_i, Last L
- Gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Mathematische Modellierung

- starre Stäbe $S_{ij} = P_i - P_j$
- reibungsfreie Verbindungen in den Knoten P_i
- Kräftegleichgewicht:

$$P_1 : \qquad k_{12}S_{12}^* + k_{13}S_{13}^* + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\|S_{ij}\|_2}$$

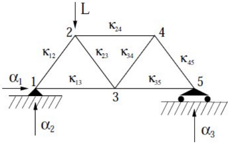
Brückenkonstruktion



- Gegeben: Knoten P_i, Last L
- Gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Freie Universität Berlin

Brückenkonstruktion



- Gegeben: Knoten P_i, Last L
- Gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

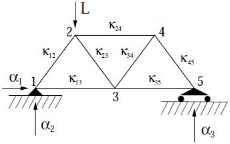
Mathematische Modellierung

- $n = 3M$ Gleichungen für M Knoten

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Beispiel: Lineares Stabwerk

Brückenkonstruktion



- Gegeben: Knoten P_i, Last L
- Gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Mathematische Modellierung

- $n = 3M$ Gleichungen für M Knoten

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

kurz: $Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$

Problem

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

- Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A, \tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

- Auswirkung von Auswertungsfehler (Stabilität)
- Aufwand und mögliche Aufwandsreduktion (Effizienz)

Kondition:Auswertung des Lösungsoperators

Lemma

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär, so existiert die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Problem

Auswertung von $f(A, b) = A^{-1}b = x \in \mathbb{R}^n$ für $(A, b) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$.

Schwierigkeiten

- Wie misst man den Fehler von $\tilde{A} \approx A$ und $\tilde{b} \approx b$?
- Wie berechnet man den maximalen Verstärkungsfaktor?

Definition

Auf der Menge V seien

- Addition $a + b : V \times V \to V$
- Multiplikation mit Skalaren $\lambda a : \mathbb{R} \times V \to V$

definiert und haben folgende Eigenschaften:

- $(V, +)$ ist Abelsche Gruppe
  (Assoziativität, Nullelement, negatives Element, Kommutativität)
- $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ (Assoziativität)
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (Distributivität)
- $1 \cdot a = a$

Dann heißt V linearer Raum (Vektorraum) über $\mathbb{R}$.

Definition

Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positive Definitheit)
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$.

- Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}$$

- p-Norm

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$

- Maximumsnorm, ∞-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Freie Universität Berlin

$V = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (Matrizen mit n Zeilen und Spalten)

Lemma

Jede Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Beweis: Interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n^2}$.

Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Eine Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt verträglich mit der Matrix-Vektor-Multiplikation, wenn gilt:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\| \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n$$

Obere Schranke für die Längenänderung durch Multiplikation mit A.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die zugehörige Matrixnorm (Operatornorm) $\|\cdot\|_M$ definiert.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die zugehörige Matrixnorm (Operatornorm) $\|\cdot\|_M$ definiert.

Eigenschaften der zugehörigen Matrixnorm

- $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm
- $\|\cdot\|_M$ ist verträglich: $\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Satz (Zeilensummennorm)

Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|, \qquad A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung

Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die zugehörige Matrixnorm. Dann existiert ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^*\| = 1$ und $\|Ax^*\| = \|A\|_M$.

Definition

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(x^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}, x^\nu \in V$ eine Folge in V. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in V$, also

$$x^\nu \to x, \qquad \nu \to \infty$$

falls

$$\|x - x^\nu\| \to 0, \qquad \nu \to \infty.$$

Beispiel

$V = \mathbb{R}^n$, Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$

$$\mathbb{R}^n \ni x^\nu \to x \in \mathbb{R}^n \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i^\nu \to x_i, i = 1, \ldots, n.$$

Freie Universität Berlin

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot_2$ auf V heißen äquivalent, falls $c, C \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \qquad \forall x \in V.$$

Freie Universität Berlin

Definition

Zwei Normen $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot_2$ auf V heißen äquivalent, falls $c, C \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1 \qquad \forall x \in V.$$

Satz (8.5)

Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot_2$ auf V heißen äquivalent, falls $c, C \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \qquad \forall x \in V.$$

Satz (8.5)

Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.

Beweis: Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endlich-dimensionalen Räumen.

Äquivalenz von Normen

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot_2$ auf V heißen äquivalent, falls $c, C \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \qquad \forall x \in V.$$

Satz (8.5)

Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.

Beweis: Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endlich-dimensionalen Räumen.

Folgerung

Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt:

$$x^\nu \to x \Leftrightarrow \|x - x^\nu\| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x - x^\nu\|_\infty \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i^\nu \to x_i, i = 1, \dots, n.$$