Computerorientierte Mathematik I

12. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

17.01.2020

Freie Universität Berlin

Rückblick: Vorlesung vom 10.12.2019

Freie Universität Berlin

Vektor- und Matrixnormen

Grundlagen

- Matrix-Vektor- und Matrix-Matrix-Produkt, lineare Räume, Beispiele

Problem

- Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Ziel: Konditionsanalyse des Problems, Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus

Normen auf linearen Räumen:

- Motivation: Erweiterung des Betrags von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n \times n}$
- Definition: Axiomatisierung des Längenbegriffs, Beispiele: $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$ auf $\mathbb{R}^n$
- Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ gehört die Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- Beispiel: Zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehört die Zeilensummen-Norm
- Definition: Äquivalenz von Normen
- Satz: In endlichdim. linearen Räumen sind alle Normen äquivalent

Definition

Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positive Definitheit)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Freie Universität Berlin

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$.

- Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}$$

- p-Norm

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$

- Maximumsnorm, ∞-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

$V = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (Matrizen mit n Zeilen und Spalten)

Lemma

Jede Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Beweis: Interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n^2}$.

Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Eine Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt verträglich mit der Matrix-Vektor-Multiplikation, wenn gilt:

$$\|Ax\| \le \|A\|_M \|x\| \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n$$

Obere Schranke für die Längenänderung durch Multiplikation mit A.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die zugehörige/induzierte Matrixnorm (Operatornorm) $\|\cdot\|_M$ definiert.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition

Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die zugehörige/induzierte Matrixnorm (Operatornorm) $\|\cdot\|_M$ definiert.

Eigenschaften der zugehörigen Matrixnorm

- $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm
- $\|\cdot\|_M$ ist verträglich: $\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

Satz (Zeilensummennorm)

Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|, \qquad A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ *auf* $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung

Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die zugehörige Matrixnorm. Dann existiert ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^*\| = 1$ und $\|Ax^*\| = \|A\|_M$.

Definition

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(x^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}, x^{\nu} \in V$ eine Folge in V. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in V$, also

$$x^{\nu} \to x, \qquad \nu \to \infty$$

falls

$$\|x - x^{\nu}\| \to 0, \qquad \nu \to \infty.$$

Beispiel

$V = \mathbb{R}^n$, Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$

$$\mathbb{R}^n \ni x^{\nu} \to x \in \mathbb{R}^n \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i^{\nu} \to x_i, i = 1, \ldots, n.$$

Freie Universität Berlin

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||_2$ auf V heißen äquivalent, falls $c, C \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V.$$

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||_2$ auf V heißen äquivalent, falls $c, C \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V.$$

Satz (8.5)

Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert \cdot \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert_2$ auf V heißen äquivalent, falls $c, C \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$c\|x\| \le \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert x \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert \le C\|x\| \qquad \forall x \in V.$$

Satz (8.5)

Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.

Folgerung: Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt:

$$x^\nu \to x \Leftrightarrow \|x - x^\nu\| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x - x^\nu\|_\infty \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i^\nu \to x_i, i = 1, \dots, n.$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{C}{c} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{C}{c} \|A\|_\infty < \infty$$

$n = 3$ Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\
2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\
3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0
\end{array}
$$

$n = 3$ Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad\qquad x = b$$

Problem

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

- Gestörtes Problem: $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$
- Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A, \tilde{b} \approx b$ auf das Ergebnis $\tilde{x}$
- Gibt es überhaupt eindeutige Lösungen x und $\tilde{x}$?

Existenz und Eindeutigkeit

Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt regulär, falls

$$x \neq 0 \qquad \Rightarrow Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Satz

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, so existiert die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

und das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

hat für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = A^{-1}b$.

Problem

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Äquivalentes Problem

Auswertung von $x = f(A, b) = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \times \mathbb{R}^n$.

Lösungsoperator

- $f(A, b) = A^{-1}b$ ist nicht explizit gegeben
- Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A, \tilde{b} \approx b$ auf das Ergebnis $\tilde{x}$
- Wann existiert $\tilde{x} = f(\tilde{A}, \tilde{b})$?

Normweiser absoluter Fehler

$$\|x - \tilde{x}\|, \qquad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 58 \end{pmatrix}, \quad \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max\{0.5,\ 42\} = 42$$

Normweiser relativer Fehler

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}, \qquad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

Beispiel:

$$x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 58 \end{pmatrix}, \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\max\{0.5,\ 42\}}{100} = 0.42$$

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Operatornorm. Ist A eine reguläre Matrix, so heißt

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

die Kondition von A. Ist A singulär, so wird $\kappa(A) = \infty$ gesetzt.

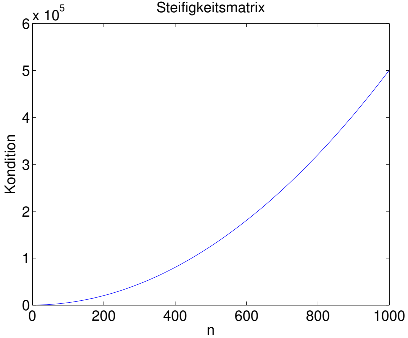
Bemerkung

- $\kappa(A) \geq 1$ und $\kappa(I) = 1$
- $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$

Beispiel: Differenzenverfahren für ein Randwertproblem

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad h = \frac{1}{n+1}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

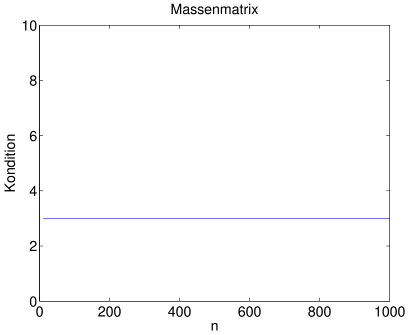


Kondition:

$\kappa_\infty(A_n) = \|A_n\|_\infty \|A_n^{-1}\|_\infty$

Beispiel: Massenmatrix (Bestapproximation)

$$M_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$



Kondition:

$$\kappa_\infty(M_n) = \|M_n\|_\infty \|M_n^{-1}\|_\infty$$

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Lösungsoperator: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $x = f(b) = A^{-1}b$, $b \in \mathbb{R}^n$

Definition

Die relative Kondition $\kappa_{\mathsf{rel},b}$ der Auswertung des Lösungsoperators f an der Stelle b ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|f(b) - f(\tilde{b})\|}{\|f(b)\|} \le \kappa_{\mathsf{rel},b} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} + o(\|b - \tilde{b}\|).$$

Ist dies für keine reelle Zahl $\kappa_{\mathsf{rel},b}$ richtig, so wird $\kappa_{\mathsf{rel},b} = \infty$ gesetzt.

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Satz (9.4)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit beliebigem $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Folgerung: $\kappa_{\mathrm{rel},b} = \kappa(A)$

Exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Auf drei Stellen gerundete rechte Seite: $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix},$$

Exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Auf drei Stellen gerundete rechte Seite: $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ 10.6 \\ 8.17 \end{pmatrix}$$

Exaktes System: $Ax = b$, $\kappa_\infty(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Auf drei Stellen gerundete rechte Seite: $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ 10.6 \\ 8.17 \end{pmatrix}$$

Gestörtes Sytem: $\tilde{A}\tilde{x} = b, \qquad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

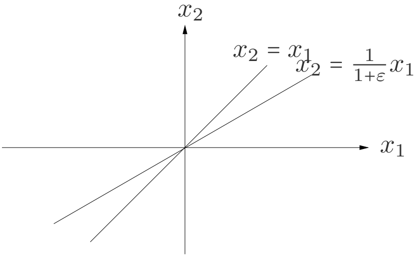
Beispiel (schleifender Schnitt)

Reguläre Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Runden im Falle $\varepsilon < \mathrm{eps}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ singulär!



Lemma (9.5)

Es sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $\|C\| < 1$. *Dann ist* $I - C$ *regulär und es gilt*

$$(I - C)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} C^k. \qquad \textit{(Neumannsche Reihe)}$$

Folgerung

Es gelte

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)} \qquad \text{bzw., äquivalent dazu,} \qquad \|A - \tilde{A}\|\|A^{-1}\| < 1.$$

Dann ist $\tilde{A}$ regulär!

Beweis: Betrachte $C = A^{-1}(A - \tilde{A})$. Dann ist $I - C = A^{-1}\tilde{A}$. ...

Satz (9.6)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|A - \tilde{A}\|\|A^{-1}\| < 1$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|).$$

Es existieren Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Skript

Numerisches Beispiel: Störung von A

Exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\qquad \|A - \tilde{A}\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 0.3672.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & \color{red}{-100} \end{pmatrix},$$

Numerisches Beispiel: Störung von A

Exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\qquad \|A - \tilde{A}\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 0.3672.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Exaktes System: $Ax = b$, $\kappa_\infty(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\|A - \tilde{A}\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 0.3672.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Satz (9.6)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|).$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Übung

Numerisches Beispiel: Störung von A und b

Exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\qquad \|A - \tilde{A}\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 0.3672.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix},$$

Numerisches Beispiel: Störung von A und b

Exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\qquad \|A - \tilde{A}\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 0.3672.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von A und b

Exaktes System: $Ax = b$, $\kappa_\infty(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\|A - \tilde{A}\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 0.3672.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Singuläre Matrizen

$$\mathcal{S} := \left\{ M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M \text{ singulär} \right\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$$

Relativer Abstand von $A \neq 0$ zu $\mathcal{S}$

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} \,\middle|\, B \in \mathcal{S} \right\}$$

Satz (9.9)

Für alle regulären Matrizen A gilt

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{S}) \geq \frac{1}{\kappa(A)}.$$