Computerorientierte Mathematik I

13. Vorlesung

Lasse Hinrichsen

Freie Universität Berlin

24.01.2020

Rückblick: Vorlesung vom 17.12.2019

Konvergenz in normierten Räumen:

- Defintion: $x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x - x^{(\nu)}\| \to 0 \quad$ für $\nu \to \infty$.
- Satz: Die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz.

Existenz und Eindeutigkeit:

- Reguläre und singuläre Matrizen. Inverse Matrix.
- Die Regularität von A ist äquivalent zur Existenz eindeutig bestimmer Lösungen.

Störungen von Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b:

- Normweiser absoluter und relativer Fehler.
- Definition: $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ heißt Kondition von A. Beispiele.
- Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von b.
- Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A.
- Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A und b.

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Lösungsoperator: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $x = f(b) = A^{-1}b$, $b \in \mathbb{R}^n$

Definition

Die relative Kondition $\kappa_{\text{rel},b}$ der Auswertung des Lösungsoperators f an der Stelle b ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|f(b) - f(\tilde{b})\|}{\|f(b)\|} \leq \kappa_{\text{rel},b} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} + o(\|b - \tilde{b}\|).$$

Ist dies für keine reelle Zahl $\kappa_{\text{rel},b}$ richtig, so wird $\kappa_{\text{rel},b} = \infty$ gesetzt.

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Satz (9.4)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit beliebigem $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Folgerung: $\kappa_{\text{rel},b} = \kappa(A)$

Satz (9.6)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|).$$

Es existieren Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Skript

Satz (9.6)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|A - \tilde{A}\|\|A^{-1}\| < 1$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}\right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|).$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Übung

Die Kondition als Quantifizierung der Regularität

Singuläre Matrizen

$$\mathcal{S} := \left\{ M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M \text{ singulär} \right\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$$

Relativer Abstand von $A \neq 0$ zu $\mathcal{S}$

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} \,\middle|\, B \in \mathcal{S} \right\}$$

Satz (9.9)

Für alle regulären Matrizen A gilt

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{S}) \geq \frac{1}{\kappa(A)}.$$

Folgerung: A „fast-singulär“, d. h. $\operatorname{dist}(A,\mathcal{S})$ ist klein $\Rightarrow$ $\kappa(A)$ groß!

Betrachte die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

$$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2+\varepsilon)\varepsilon^{-1}(2+\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \to \infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Beispiel: Schleifender Schnitt

Betrachte die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

$$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2+\varepsilon)\varepsilon^{-1}(2+\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \to \infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1 \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\kappa_\infty(A)}.$$

Beispiel: Schleifender Schnitt

Betrachte die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

$$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2+\varepsilon)\varepsilon^{-1}(2+\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \to \infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1 \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\kappa_\infty(A)}.$$

Bemerkung: A regulär $\Rightarrow$ es ex. $B \in \mathcal{S}$ mit

$$\operatorname{dist}_\infty(A, \mathcal{S}) = \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\kappa_\infty(A)}.$$

Beispiel: Schleifender Schnitt

Betrachte die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

$$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2+\varepsilon)\varepsilon^{-1}(2+\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \to \infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1 \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\kappa_\infty(A)}.$$

Bemerkung: A regulär $\Rightarrow$ es ex. $B \in \mathcal{S}$ mit

$$\operatorname{dist}_\infty(A,\mathcal{S}) = \frac{\|A-B\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\kappa_\infty(A)}.$$

Folgerung: Schlecht konditionierte Matrizen sind „fast singulär“.

Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Auswertung des Lösungsoperators $f(A,b) = A^{-1}b$ zu Daten $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Satz 9.7 Relative Kondition des Problems $\kappa_{\mathsf{rel}} = \kappa(A)$.

Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Auswertung des Lösungsoperators $f(A, b) = A^{-1}b$ zu Daten $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Satz 9.7 Relative Kondition des Problems $\kappa_{\text{rel}} = \kappa(A)$.
Algorithmus: Zerlegung des Lösungsoperators in Elementaroperationen

$$x = A^{-1}b = G_m \circ \cdots \circ G_1(A, b).$$

Qualitätskriterien: Aufwand und Stabilität.

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad\qquad x \quad = \quad b$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad\qquad x \quad = \quad b$$

erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array} \right)$$

eliminieren von x_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \;\; * \text{ 1. Zeile} \\ -3 \;\; * \text{ 1. Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \;*\; \text{1. Zeile} \\ -3 \;*\; \text{1. Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \;*\; \text{2. Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}}_{z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x \quad = \quad z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & \color{red}{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} \\ \\ \color{red}{7} \end{pmatrix}$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x \quad = \quad z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -31/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x \quad = \quad z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -31/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 10\end{pmatrix}$$

$$L \qquad R \qquad = \qquad A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L \qquad R \qquad = \qquad A$$

LR–Zerlegung

Freie Universität Berlin

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Berechnung von $(A^{(0)}|b^{(0)}) \rightarrow (A^{(1)}|b^{(1)})$:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}\,, \qquad b_1^{(1)} = b_1\,, \qquad j = 1, \dots, n\,,$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \ell_{i1} a_{1j}\,, \qquad b_i^{(1)} = b_i - \ell_{i1} b_i\,, \qquad \ell_{i1} := \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,, \qquad i, j = 2, \dots, n\,,$$

Gaußsche Elimination

for $k = 1$ to $n-1$ **do**
    for $i = k+1$ to n **do**
        $\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ {Nur erlaubt, wenn $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$!}
        $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \ell_{ik} b_k^{(k-1)}$
        $a_{ik}^{(k)} = 0$
        for $j = k$ to n **do**
            $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$
        end for
    end for
end for

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Algorithmus 9.13 (Rückwärtssubstitution):

1: $x_n = \frac{1}{a_{nn}^{(n-1)}} b_n^{(n-1)}$
2: **for** $i = n - 1$ to 1 **do**
3: $\quad x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(n-1)}} \left(b_i^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j \right)$
4: **end for**

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ell_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Lemma 9.16: Mit $A^{(0)} = A$ und $b^{(0)} = b$ gilt

$$A^{(k)} = (I - G_k)A^{(k-1)}\,, \quad b^{(k)} = (I - G_k)b^{(k-1)}\,, \qquad k = 1, \ldots, n-1\ .$$

Theorem (Satz 9.17)

Ist der Gaußsche Algorithmus für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ durchführbar (d.h. erhält man Pivotelemente $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$) und ergeben sich dabei die Eliminationsmatrizen $G_1, \ldots, G_{n-1}$, so gilt

$$A = LR \quad \textit{mit} \quad L = I + \sum_{k=1}^{n-1} G_k \, , \quad R = \prod_{k=1}^{n-1} (I - G_{n-k}) A$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus: Anzahl der Punktoperationen

- Aufwand des Eliminationsschritts:

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus: Anzahl der Punktoperationen

- Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} 1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{3}\left(n^3 - n\right) + \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}\left(n^2\right).$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus: Anzahl der Punktoperationen

- Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} 1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{3}\left(n^3 - n\right) + \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}\left(n^2\right).$$

- Aufwand der Rückwärtssubstitution

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right).$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen
Aufwand des Gaußschen Algorithmus: Anzahl der Punktoperationen

- Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} 1$$
$$= \frac{1}{3}\left(n^3 - n\right) + \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}\left(n^2\right).$$

- Aufwand der Rückwärtssubstitution

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right).$$

Gesamtaufwand: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}\left(n^2\right)$.

Lösung von $Ax = b$ mit LR–Zerlegung

- Gauß–Elimination:
  Berechnung von $A = LR$ Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}\left(n^2\right)$
- Vorwärtssubstitution
  Löse $Lz = b$ $\mathcal{O}\left(n^2\right)$
- Rückwärtssubstitution
  Löse $Rx = z$ $\mathcal{O}\left(n^2\right)$

- Gauß–Elimination:
  Berechnung von $A = LR$ Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}\left(n^2\right)$
- Vorwärtssubstitution
  Löse $Lz = b$ $\mathcal{O}\left(n^2\right)$
- Rückwärtssubstitution
  Löse $Rx = z$ $\mathcal{O}\left(n^2\right)$
- Viele Systeme mit verschiedenen rechten Seiten:
  $Ax^j = b^j, \quad j = 1, \ldots, J,$ Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + J \cdot \mathcal{O}\left(n^2\right)$

Ausnutzen von Spezialstruktur: Tridiagonalmatrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ausnutzen von Spezialstruktur: Tridiagonalmatrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Beobachtung: $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} = 0 - 0, \quad i > k+1$

Ausnutzen von Spezialstruktur: Tridiagonalmatrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Beobachtung: $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} = 0 - 0, \quad i > k+1$

Thomas-Algorithmus: $a_{ij}^{(k)} =: 0 \;\; i > k+1 \Longrightarrow$ Aufwand: $5n - 4 = \mathcal{O}(n)$