Computerorientierte Mathematik I

15. Vorlesung

Carsten Gräser

Freie Universität Berlin

14.02.2020

Freie Universität Berlin

Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus'

Auswirkung von Auswertungsfehlern

- Beispiel
- Stabilitätsanalyse mit unterschiedlicher Auflösung
- Einfachster Fall:

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 2\kappa(R)\,\mathrm{eps} + o(\mathrm{eps})$$

$$\kappa(R) = \kappa\Big(\prod_{k=1}^{n-1}(I-G_k)A\Big) \leq \kappa(A)\prod_{k=1}^{n-1}\kappa(I-G_k)$$

- Fazit: Konditionsverschlechterung durch Elimination
- Extrembeispiel: Wilkinson-Matrix

Freie Universität Berlin

Satz

$$\kappa(I - G_k) = \|I - G_k\|_\infty \|(I - G_k)^{-1}\|_\infty = \max_{i=k+1,\dots,n} (1 + |l_{ik}|)^2, \qquad l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

Folgerung

- $|a_{kk}^{(k-1)}| \ll |a_{ik}^{(k-1)}| \implies |l_{ik}| = \left|\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right| \gg 1 \implies \kappa(I - G_k) \gg 1$
- $|a_{kk}^{(k-1)}| \gg |a_{ik}^{(k-1)}| \implies |l_{ik}| = \left|\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right| \ll 1 \implies \kappa(I - G_k) \approx 1$

Stabilität falls $|a_{kk}^{(k-1)}| \gg |a_{ik}^{(k-1)}|$

Gaußscher Algorithmus mit Spaltenpivotsuche

for $k = 1$ to $n-1$ **do**
    Setze $k_0 = k$
    for $i = k+1$ to n **do**
        if $|a_{ik}^{(k-1)}| > |a_{k_0,k}^{(k-1)}|$ **then**
            Setze $k_0 = i$
        end if
    end for
    Vertauche die k-te und k_0-te Zeile
    k-ter Eliminationsschritt ...
end for

Folgerung

$$|l_{ik}| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \kappa(I - G_k) \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad \kappa(R) \leq 4^{n-1}\kappa(A)$$

Satz

Die Gaußsche Elimination mit Spaltenpivotsuche liefert eine Zerlegung

$$LR = PA$$

mit unterer Dreiecksmatrix L oberer Dreiecksmatrix R und einer Permutationsmatrix P. PA unterscheidet sich von A also nur durch Vertauschen der Zeilen.

Vorschau: Computerorientierte Mathematik II

Polynominterpolation

- Kondition, Lagrange-Darstellung, Newton-Darstellung
- Das Restglied bei der Polynominterpolation

Numerische Quadratur

- Vorbemerkungen zum Integraloperator, Kondition
- Globale Newton-Côtes-Formeln, Stabilität, Konvergenz
- Summierte Newton-Côtes-Formeln, Stabilität, Konvergenz

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

- Motivation: Bewegung eines Teichens, radioaktiver Zerfall
- Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
- Existenz, Eindeutigkeit, Kondition
- Euler-Verfahren: Stabilität und Konsistenz
- Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Nichtlineare Gleichungssysteme

- Fixpunktiteration und Newton-Verfahren

Freie Universität Berlin

Berliner Mathematik

- FU Berlin, TU Berlin, HU Berlin
- Weierstraß-Institut (WIAS)
- Zuse Institut Berlin (ZIB)

Exzellenzinitiative

- Berlin Mathematical School (BMS): FU, TU, HU
- Forschungszentrum Math+: FU, TU, HU, WIAS, ZIB