

4. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WS 2019/2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2019/CoMaI.php

Abgabe: Montag, 2. Dezember 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (2 Bonus TP)

Berechnen Sie die absolute Kondition der Auswertung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x - 2)^2$$

an der Stelle $x_0 = 4$.

2. Aufgabe (8 TP)

- a) Es seien Funktionen $f(x) = o(x)$ und $g(x) = o(x)$ für $x \rightarrow 0$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$f(x) + g(x) = o(x) \quad f(x)/g(x) = o(x) \quad f(x)g(x) = o(x).$$

- b) Beweisen Sie für x , $\text{rd}(x) \neq 0$ die Beziehung

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} = \frac{|\text{rd}(x) - x|}{|\text{rd}(x)|} + o(\text{eps}),$$

wobei eps die Maschinengenauigkeit bezeichnet.

3. Aufgabe (8 TP)

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Betrachte dazu die gestörten Eingaben $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ und den maximalen relativen Fehler

$$\varepsilon = \max \left\{ \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|, \left| \frac{\tilde{y} - y}{y} \right| \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die aus der Vorlesung bekannten Abschätzungen der relativen Konditionen für die Grundrechenarten scharf sind, genauer:

a) (+)

Angenommen $x, y > 0$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen kein $c < 1$ existiert, so dass

$$\frac{|(x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})|}{|x + y|} \leq c\varepsilon.$$

b) (-)

Angenommen $x, y > 0, x \neq y$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen kein $c < 1$ existiert, so dass

$$\frac{|(x - y) - (\tilde{x} - \tilde{y})|}{|x - y|} \leq c \left(\frac{|x| + |y|}{|x - y|} \right) \varepsilon.$$

c) (\cdot)

Angenommen $x \neq 0, y \neq 0$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen kein $c < 2$ existiert, so dass

$$\frac{|(x \cdot y) - (\tilde{x} \cdot \tilde{y})|}{|x \cdot y|} \leq c\varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

d) (/)

Angenommen $x \neq 0, y \neq 0$ und $\varepsilon < 1$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen kein $c < 2$ existiert, so dass

$$\frac{|(x/y) - (\tilde{x}/\tilde{y})|}{|x/y|} \leq c\varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.