

5. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WS 2019/2020

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS\\_2019/CoMaI.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2019/CoMaI.php)

**Abgabe: Freitag, 6. Dezember 2019, 12:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 TP)

Finden Sie eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und vier verschiedene Werte  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$  in der Weise, dass hinsichtlich der Kondition der Funktionsauswertung an der jeweiligen Stelle jede der folgenden vier Möglichkeiten einmal auftritt:

- a)  $\kappa_{\text{abs}}$  groß,  $\kappa_{\text{rel}}$  klein
- b)  $\kappa_{\text{abs}}$  klein,  $\kappa_{\text{rel}}$  groß
- c)  $\kappa_{\text{abs}}$  groß,  $\kappa_{\text{rel}}$  groß
- d)  $\kappa_{\text{abs}}$  klein,  $\kappa_{\text{rel}}$  klein

Geben Sie  $\kappa_{\text{rel}}$  und  $\kappa_{\text{abs}}$  Ihrer Funktion an den vier Stellen explizit an.

Wenn Sie eine Funktion finden, die nicht abschnittsweise definiert werden muss, erhalten Sie einen Zusatzpunkt.

**2. Aufgabe** (6 TP)

Seien  $b, c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sowie

$$f_1(x) = x^3 - c \quad f_2(x) = mx + b.$$

- a) Berechnen Sie zu  $f_i$  jeweils die absolute Kondition  $\kappa_{\text{abs}}$  des Problems der Nullstellenbestimmung von  $f_i$  bei Störung von  $c$  beziehungsweise  $m$ .
- b) Für welche  $c$  bzw.  $m$  ist  $\kappa_{\text{abs}}$  klein? Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis anhand zweier Grafiken.

**Hinweis:** Machen Sie sich zunächst klar, welche der beteiligten Unbekannten  $x, c, m, b$  die Eingabegröße für die jeweilige Konditionsberechnung ist.

### 3. Aufgabe (6 TP)

- a) Seien  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegebene Funktionen und sei  $f := g + h$ . Zeigen Sie, dass für die absolute Kondition der Auswertung der Funktion  $f$  in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  die Abschätzung

$$\kappa_{\text{abs}}(f, x) \leq \kappa_{\text{abs}}(h, x) + \kappa_{\text{abs}}(g, x)$$

gilt.

- b) Verwenden Sie dieses Resultat, um die absolute und die relative Kondition der Auswertung von  $f(x) = x^5 + |x^3|$  abzuschätzen.
- c) Berechnen Sie unter Verwendung von a) die absolute und die relative Kondition der Auswertung von  $f(x) = g(x) + h(x)$  in  $x = 0$ , wobei  $g(x) = \sin^2(x)$  und  $h(x) = \cos^2(x)$  sei. Finden Sie außerdem ein  $x$  für das die Abschätzung aus a) nicht scharf ist.

#### ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.