

6. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WS 2019/2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2019/CoMaI.php

Abgabe: Freitag, 13. Dezember 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (8 TP)

Finden Sie für jeden der untenstehenden Ausdrücke jeweils eine geeignete Umformung, sodass die Auswertung für $x > 0$ möglichst stabil ist. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

a)
$$\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x) - x}{x^2 - 1}$$

b)
$$\frac{3x^2 + 5}{5 + x} - \frac{1 - 3x}{1 + 3x}$$

c)
$$\sqrt{ax + b} - \sqrt{a^3x^3 + 3a^2x^2b + 3axb^2 + b^3}$$

2. Aufgabe (4 Bonus TP)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ sei x_k durch die Drei-Term-Rekursion $x_{k+1} + ax_k + bx_{k-1} = 0$ definiert. Im Folgenden betrachten wir für ein $K \in \mathbb{N}$ den Wert x_K in Abhängigkeit von x_0 , also als Funktion $f_K(x_0) = x_K$.

- Berechnen Sie die absolute Kondition $\kappa_{\text{abs}}(f_K, x_0)$ der Auswertung von f_K in x_0 .
- Finden und beweisen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an a, b und $x_{-1} \in \mathbb{R}$ dafür, dass $\kappa_{\text{abs}}(f_K, x_0)$ für $K \rightarrow \infty$ gleichmäßig beschränkt ist.

3. Aufgabe (8 PP)

Zu $I = [-1, \infty)$ seien $f: I \rightarrow I$ samt Umkehrfunktion $f^{-1}: I \rightarrow I$ gegeben durch

$$f(x) = x(x + 2), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 1.$$

Die Verkettung von f und f^{-1} führt unabhängig von der Reihenfolge zur Identität auf I , also $f^{-1} \circ f = \text{id}_I = f \circ f^{-1}$.

- Schreiben Sie eine Python-Funktion `concat(g1, g2)`, die die Verkettung $g_1 \circ g_2$ zweier Funktionen g_1 und g_2 realisiert.
- Vergleichen Sie nun die Identitäten $f^{-1} \circ f$ mit $f \circ f^{-1}$. Implementieren Sie hierfür unter Verwendung von `concat` eine Funktion `generateData(x)`, die ein Tupel

`(val1, val2, err1, err2)`

zurückgibt.

Hierbei soll `val1` der Auswertung von $f^{-1}(f(x))$ entsprechen und `err1` der relative Fehler von `val1` zu `x` sein. Analog soll `val2` der Auswertung von $f(f^{-1}(x))$ entsprechen und `err2` der relative Fehler von `val2` zu `x` sein.

- Schreiben Sie ein Skript, das `generateData` für $x = -1 + 10^{-k}$ mit $k \in \{0, \dots, 12\}$ aufruft und die berechneten Daten in einer Tabelle mit den Spalten

`k val1 val2 err1 err2`

ausgibt. Wählen Sie dabei eine sinnvolle Darstellung der jeweiligen Zahlenwerte. Speichern Sie die Tabelle außerdem (als Text-Datei) in der Datei `daten.txt` ab.

- Was beobachten Sie und wie erklären Sie sich die Resultate? Schreiben Sie Ihre Antwort in die Datei `beobachtungen.txt`.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.