

7. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WS 2019/2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2019/CoMaI.php

Abgabe: Freitag, 20. Dezember 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (8 TP)

Zur Auswertung einer Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ soll der Algorithmus

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1} = \frac{g_2(g_1(x))}{g_2(g_3(x))}, \quad g_1(x) = x^8, \quad g_2(y) = y - 1, \quad g_3(x) = x^4$$

verwendet werden.

- Bestimmen Sie die relative Stabilität des Algorithmus in $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Was geschieht für $x \rightarrow 1$?
- Geben Sie einen Algorithmus für die Auswertung von f an, für den die relative Stabilität in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gleichmäßig beschränkt ist. Dabei können Sie Grundrechenarten sowie Elementarfunktionen der Art $h(x) = x^n$ und $h(x) = x + c$ verwenden.

2. Aufgabe (8 TP)

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ sei

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2x} - \frac{1 - x}{1 + x}.$$

- Bestimmen Sie $\kappa_{\text{rel}}(f, x)$ für $x > 0$. Diskutieren Sie anschließend die relative Stabilität σ_{rel} für einen beliebigen Algorithmus, der der obigen Darstellung der Abbildungsvorschrift von f entspricht.
- Finden Sie einen stabileren Algorithmus für die Auswertung von f .

3. Aufgabe (8 PP)

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \exp(x)$ soll durch die Funktion

$$f_N(x) := \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}$$

(also der Potenzreihenentwicklung bis zur N -ten Ordnung) approximiert werden.

- a) Implementieren Sie f_N in PYTHON, indem Sie eine Funktion `exp_approx(x, N)` schreiben, deren Rückgabewert der Auswertung von $f_N(x)$ entspricht. Außerdem: Falls Sie die Funktion `math.factorial` verwenden (oder anderweitig in jedem Durchlauf einer Schleife die Fakultät $k!$ mit vergleichbar hohem Aufwand auswerten) gibt es Punktabzug!
- b) Wir betrachten nun die verschiedenen Formulierungen

$$g_1(N, x) = f_N(x), \quad g_2(N, x) = \frac{1}{f_N(-x)}, \quad g_3(N, x, K) = f_N\left(\frac{|x|}{K}\right)^{\text{sign}(x) \cdot K}$$

Schreiben Sie eine Skriptdatei `run_7.3.py`, die für $x \in \{-5, 1, 5\}$, $K \in \{1, 11\}$ sowie für $N \in \{0, 5, 10, \dots, 50\}$ die folgenden relativen Fehler

$$\begin{aligned} \text{error}_1(x_j, N_k) &= \frac{|g_1(x_j, N_k) - \exp(x_j)|}{\exp(x_j)} \\ \text{error}_2(x_j, N_k) &= \frac{|g_2(x_j, N_k) - \exp(x_j)|}{\exp(x_j)} \\ \text{error}_3(x_j, N_k, K_l) &= \frac{|g_3(x_j, N_k, K_l) - \exp(x_j)|}{\exp(x_j)} \end{aligned}$$

für alle möglichen Kombinationen aus (x_j, N_k, K_l) berechnet.

Wählen Sie ein sinnvolles Zahlenformat und tabellieren Sie alle berechneten Fehler, so dass jede Zeile einem möglichen Wert von N entspricht und die Spalten den jeweiligen Fehlern. Sie sollten also $3 + 3 + 2 \cdot 3 = 12$ verschiedene Fehlerkombinationen für jedes N bekommen. Speichern Sie die Tabelle als Textdatei `daten.txt` ab.

- c) Schildern Sie Ihre Beobachtungen und interpretieren Sie die Ergebnisse. Schreiben Sie Ihre Antwort in eine Datei `beobachtungen7.txt`.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.