Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Lasse Hinrichsen

10. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2019/2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2019/CoMaI.php

Abgabe: Freitag, 24. Januar 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe Matrix-wertiger Operationen so um, dass sie keine Summenzeichen verwenden.

a) $(\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{jk})_{i,j=1}^n$

b) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ji}x_i y_j$

c) $(x_i y_j)_{i,j=1}^n$

d) $\left(\frac{\sum_{k=1}^n y_i y_k x_k}{\sum_{k=1}^n y_k^2}\right)_{i=1}^n$

Hinweis: Hier beschreibt die Notation $(c_i)_{i=1}^n$ denjenigen Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$, dessen i-ter Eintrag durch c_i gegeben ist. Analog beschreibt die Notation $(C_{ij})_{i,j=1}^n$ diejenige Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte durch C_{ij} gegeben ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die *Spaltensummennorm* definiert durch

$$\|A\| = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^n |A_{ij}|.$$

Zeigen Sie, dass die Spaltensummennorm $\|\cdot\|$ die von $\|\cdot\|_1$ induzierte Matrixnorm ist.

3. Aufgabe (4 TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$$

und bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ so dass Gleichheit gilt.

b) Zeigen Sie für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

und bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ so dass Gleichheit gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Cauchy–Schwarz-Ungleichung verwenden.

4. Aufgabe (4 TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Im Folgenden bezeichne $\|\cdot\|_2$ die von der euklidischen Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Matrixnorm. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls A eine Diagonalmatrix ist, also $A_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt, dann gilt die Gleichung

$$\|A\|_2 = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |A_{ii}|.$$

b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, so dass $Q^\top = Q^{-1}$ gilt. Weiter sei $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix und wir nehmen an, dass $A = Q^\top \Lambda Q$. Dann gilt

$$\|A\|_2 = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |\Lambda_{ii}|$$

5. Aufgabe (2 Bonus TP)
Sei $\|\cdot\|$ die von $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|A\| = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

gilt.

6. Aufgabe (2 Bonus TP)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

7. Aufgabe (2 Bonus TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $x* \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x*\|_a = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|x_k - x*\|_b = 0.$$

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.