

11. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WS 2019/2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2019/CoMaI.php

Abgabe: Freitag, 31. Januar 2019, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP + 2 Bonus TP)

a) Zeigen Sie, dass die Kondition einer Diagonalmatrix $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$M_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } \lambda_i \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf \mathbb{R}^n durch $\kappa_\infty(M) = \frac{\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|}{\min_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|}$ gegeben ist.

b) Bestimmen Sie explizit Vektoren $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass für $x := M^{-1}b$ und $\tilde{x} := M^{-1}\tilde{b}$ die Gleichung

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \kappa_\infty(M) \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

gilt.

2. Aufgabe (4 TP + 2 Bonus TP)

Zu $x \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ gegeben.

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $A(x)$ invertierbar?
- Berechnen Sie $A(x)^{-1}$.
- Berechnen Sie $\kappa_\infty(A(x))$.
- Was geschieht mit $\kappa_\infty(A(x))$ in der Nähe der x_0 , für die $A(x_0)$ nicht invertierbar ist?
- Geben Sie ein x an, für das $\kappa_\infty(A(x)) < 5$ gilt.

3. Aufgabe (4 TP)

Seien $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $x, \tilde{x}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Gelte weiter $b \neq 0$, $Ax = b$, $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\|A - \tilde{A}\| < 1/\|A^{-1}\|$. Beweisen Sie die Abschätzung

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|)$$

für $\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\| \rightarrow 0$. Hierbei ist $\kappa(A)$ die Kondition der Matrix A bezüglich der $\|\cdot\|$ -Norm.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.