

12. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WS 2019/2020

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2019/CoMaI.php

Abgabe: Freitag, 21. Januar 2019, 12:00 Uhr

Hinweis: Die Aufgaben werden nur für Gruppen korrigiert, die noch nicht die 60% Grenze (in Theorie- und/oder Programmieraufgaben) erreicht haben!

1. Aufgabe (12 Bonus TP)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre $(n \times n)$ -Matrix. Beschreibe $S = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : B \text{ singular}\}$ die Menge aller singulären $(n \times n)$ -Matrizen. Weiterhin gilt die Definition des relativen Abstands

$$\text{dist}(A, S) = \inf_{B \in S} \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2}$$

in der euklidischen Norm.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\text{dist}(A, S) \geq 1/\kappa(A)$$

gilt (für $\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$). Zeigen Sie, dass für die euklidische Norm sogar

$$\text{dist}(A, S) = 1/\kappa(A) \tag{1}$$

gilt

Hinweis:

- a) Betrachten Sie die Matrix

$$\hat{A} = A - Ay_0y_0^\top$$

für ein y_0 mit $\|y_0\| = 1$. (Warum ist diese Matrix singulär?)

- b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\|A - \hat{A}\|_2 \leq \|Ay_0\|_2$$

- c) Finden Sie ein y_0 , so dass gilt:

$$\|Ay_0\|_2 = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$$

Anschließend kombinieren Sie die Teilschritte, um Aussage (1) zu erhalten.

2. Aufgabe (12 Bonus TP)

- a) Implementieren Sie den Gaußschen Algorithmus (LR -Zerlegung ohne Spaltenpivoting). Stellen Sie dazu drei Routinen zur Verfügung, und zwar die eigentliche LR -Zerlegung, die Vorwärtselimination und die Rückwärtssubstitution:

- `def lr(A)`

Erhält eine Matrix (in Form eines `numpy.ndarrays`) `A` und soll ein Tupel (`L`, `R`) zurückgeben, wobei `L` und `R` jeweils Matrizen sind, so dass $LR = A$.

- `def vorwaerts_elim(L, b)`

Erhält eine untere Dreiecksmatrix `L` und einen Vektor `b` und berechnet `z`, so dass $Lz = b$. Rückgabewert dieser Funktion soll dieses `z` sein.

- `def rueckwaerts_subst(R, z)`

Erhält eine obere Dreiecksmatrix `R` und einen Vektor `z` und berechnet `x`, so dass $Rx = z$. Rückgabewert dieser Funktion soll dieses `x` sein.

Achten Sie darauf, dass die Funktionen die *Eingabedaten* nicht modifiziert! Sollte der Gaußsche Algorithmus nicht durchführbar sein, sollte Ihre Funktion eine Fehlermeldung produzieren!

- b) Testen Sie Ihre Implementierung, indem Sie Systeme verschiedener Größen lösen. Genauer, für $n = 2, 3, 5, 10, 50$, erzeugen Sie eine zufällig Matrix `A` (beispielsweise mit `numpy.random.rand(n,n)` und eine rechte Seite `b` (ebenfalls mit `numpy.random.rand(n)`). Stellen Sie dabei sicher, dass die Matrix vollen Rank hat (beispielsweise indem Sie `numpy.linalg.det(A) != 0` überprüfen).

Lösen Sie das System $Ax = b$ mittels der von Ihnen geschriebenen Funktionen und betrachten Sie den Fehler mittels

```
np.linalg.norm(A.dot(x) - b).
```

Welche Ausgabe erwarten Sie für eine korrekte Lösung? Wie verhält sich das zu Ihrem Ergebnis?

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.