

Vektor- und Matrixnormen Vorlesung vom 22.1.21

Grundlagen:

Matrix-Vektor- und Matrixprodukt. Lineare Räume. Beispiele.

Problem:

Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Ziele: Konditionsanalyse dieses Problems, Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

Normen auf linearen Räumen:

Motivation: Erweiterung des Betrags von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}^{n,n}$.

Definition: Axiomatisierung des Längenbegriffs. Beispiele: $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, auf \mathbb{R}^n .

Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ gehörige Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Beispiel: Zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehört die Zeilensummen-Norm.

Definition: Konvergenz in linearen Räumen.

Satz: Die Konvergenz in \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}^{n,n}$ ist äquivalent zur komponentenweise Konvergenz.

Normen

Definition 8.1 Es sei V ein linearer Raum über \mathbb{R} . Eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Norm**, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad (1)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\text{Homogenität}), \quad (2)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}). \quad (3)$$

Das Paar $(V, \| \cdot \|)$ heißt **normierter Raum**.

Beispiele: Vektornormen

$$x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$$

Euklidische Norm:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Maximumsnorm (∞ -Norm):

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Die zu einer Vektornorm gehörige Matrixnorm

Definition 8.8 Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf \mathbb{R}^n . Dann ist durch

$$\|A\|_M = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n},$$

die **zugehörige Matrixnorm** $\|\cdot\|_M$ definiert.

Bemerkung: Für zugehörige Matrixnormen gilt

- $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm.
- $\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n},$ (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Die zur Maximumsnorm gehörige Matrixnorm

Satz 8.10 (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n},$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ auf \mathbb{R}^n .

Konvergenz in normierten Räumen

Definition 8.4 Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Folge. Die Folge heißt **konvergent** gegen $x \in V$, also

$$x^{(\nu)} \rightarrow x, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Konvergenz von Vektoren und Matrizen

Konvergenz in $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm (!):

$$(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \iff x_i^{(\nu)} \rightarrow x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Konvergenz von Vektoren und Matrizen

Konvergenz in $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm (!):

$$(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \iff x_i^{(\nu)} \rightarrow x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Konvergenz in $V = \mathbb{R}^{n,n}$ mit beliebiger Norm (!):

$$(A^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow A \in \mathbb{R}^{n,n} \iff a_{ij}^{(\nu)} \rightarrow a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

Konvergenz von Vektoren und Matrizen

Konvergenz in $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm (!):

$$(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \iff x_i^{(\nu)} \rightarrow x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Konvergenz in $V = \mathbb{R}^{n,n}$ mit beliebiger Norm (!):

$$(A^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow A \in \mathbb{R}^{n,n} \iff a_{ij}^{(\nu)} \rightarrow a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

Folgerung: \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}^{n,n}$ sind vollständig.

Lineare Gleichungssysteme

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \quad x \quad = \quad b$

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 9.1 Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt **regulär**, falls

$$x \neq 0 \implies Ax \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

andernfalls **singulär**.

Ist A regulär, so existiert eine eindeutig bestimmte **Inverse** $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

und das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

hat für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ eine **eindeutig bestimmte Lösung** $x = A^{-1}b$.

Kondition

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Kondition

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

äquivalentes Problem:

Auswertung von $x = f(A, b) = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n$ für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Lösungsoperator: $f(A, b) = A^{-1}b$ nicht explizit gegeben

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ auf das Ergebnis \tilde{x}

Fehlermaße

normweiser absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$x = (0.5, 123)^T, \quad \tilde{x} = (1, 100)^T, \quad \|x - \tilde{x}\|_{\infty} = \max\{0.5, 23\} = 23$$

Fehlermaße

normweiser absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$x = (0.5, 123)^T, \quad \tilde{x} = (1, 100)^T, \quad \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max\{0.5, 23\} = 23$$

normweiser relativer Fehler:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}, \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

Beispiel:

$$x = (0.5, 123)^T, \quad \tilde{x} = (1, 100)^T, \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\max\{0.5, 23\}}{123} \approx 0.186$$

Die Kondition einer Matrix

Definition 9.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ist A eine reguläre Matrix, so heißt

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Kondition von A . Ist A singulär, so wird $\kappa(A) = \infty$ gesetzt.

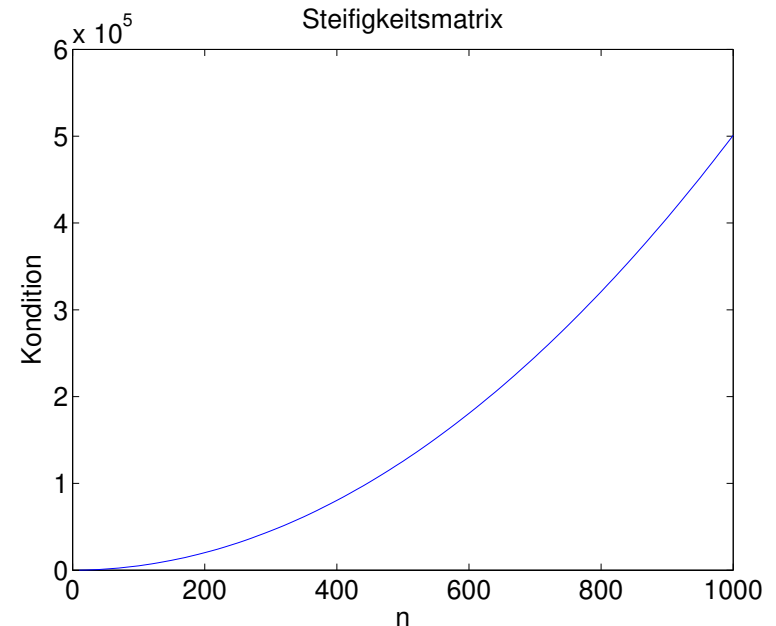
Bemerkung: Es gilt

- $\kappa(A) \geq 1$ und $\kappa(I) = 1$
- $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$

Beispiel: Differenzenverfahren für ein Randwertproblem

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad h = 1/(n+1)$$

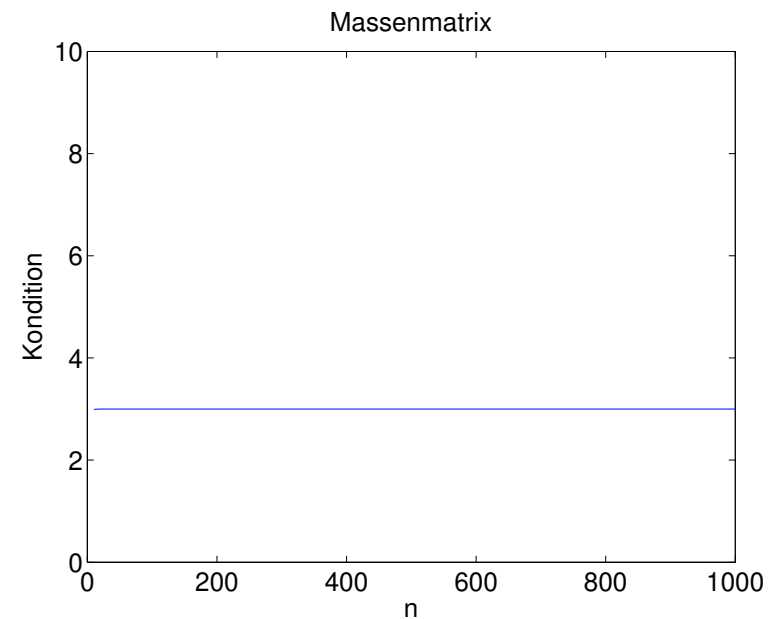
$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$



Kondition: $\kappa_\infty(A_n) = \|A_n\|_\infty \|A_n^{-1}\|_\infty$

Beispiel: Massenmatrix (Bestapproximation)

$$M_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$



Kondition: $\kappa_\infty(M_n) = \|M_n\|_\infty \|M_n^{-1}\|_\infty$

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Lösungsoperator: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $x = f(b) = A^{-1}b$, $b \in \mathbb{R}^n$

Definition: Die **relative Kondition** $\kappa_{\text{rel},b}$ der Auswertung des Lösungsoperators f an der Stelle b ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|f(b) - f(\tilde{b})\|}{\|f(b)\|} \leq \kappa_{\text{rel},b} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} + o(\|b - \tilde{b}\|).$$

Ist dies für keine reelle Zahl $\kappa_{\text{rel},b}$ richtig, so wird $\kappa_{\text{rel},b} = \infty$ gesetzt.

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Satz 9.4 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit beliebigem $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

Auswirkungen von Störungen der rechten Seite b

Satz 9.4 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit beliebigem $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Folgerung: $\kappa_{\text{rel},b} = \kappa(A)$

Numerisches Beispiel: Störung von b

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von b

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

auf 3 Stellen gerundete rechte Seite: $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von b

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

auf 3 Stellen gerundete rechte Seite: $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ 10.6 \\ 8.17 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von b

exaktes System: $Ax = b$ $\kappa_{\infty}(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

auf 3 Stellen gerundete rechte Seite: $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ 10.6 \\ 8.17 \end{pmatrix}$$

Störungen der Koeffizientenmatrix A

gestörtes System: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$

Existiert eine eindeutig bestimmte Lösung \tilde{x} ?

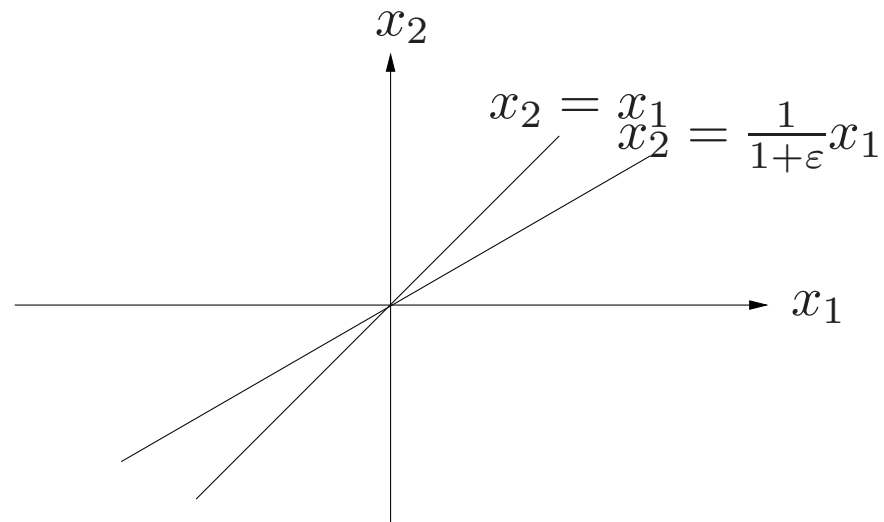
Beispiel (schleifender Schnitt):

reguläre Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Runden im Falle $\varepsilon < eps$:

$$\tilde{A} = \text{rd}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{singulär!}$$



Kleine Störungen erhalten die Regularität

Lemma 9.5 Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|C\| < 1$.
Dann ist $I - C$ regulär, und es gilt

$$(I - C)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} C^k \quad (\text{Neumannsche Reihe}).$$

Kleine Störungen erhalten die Regularität

Lemma 9.5 Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|C\| < 1$.
Dann ist $I - C$ regulär, und es gilt

$$(I - C)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} C^k \quad (\text{Neumannsche Reihe}).$$

Folgerung:

$$\begin{aligned} \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)} &\iff \|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1 \\ &\implies \tilde{A} \text{ regulär!} \end{aligned}$$

Auswirkungen von Störungen der Koeffizientenmatrix A

Satz 9.6 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|).$$

Auswirkungen von Störungen der Koeffizientenmatrix A

Satz 9.6 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|).$$

Es existieren Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Auswirkungen von Störungen der Koeffizientenmatrix A

Satz 9.6 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|).$$

Es existieren Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Skript

Numerisches Beispiel: Störung von A

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von A

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -299 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\|A^{-1}\|_{\infty}\|A - \tilde{A}\|_{\infty} = 0.3672$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von A

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\|A^{-1}\|_{\infty}\|A - \tilde{A}\|_{\infty} = 0.3672$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von A

exaktes System: $Ax = b$ $\kappa_{\infty}(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundete Koeffizientenmatrix: $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\|A^{-1}\|_{\infty}\|A - \tilde{A}\|_{\infty} = 0.3672$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Auswirkungen von Störungen von A und b

Satz 9.7 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|).$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Auswirkungen von Störungen von A und b

Satz 9.7 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|).$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizientenmatrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Übung

Numerisches Beispiel: Störung von A und b

exaktes System: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundetes System: $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix}$$

Numerisches Beispiel: Störung von A und b

exaktes System: $Ax = b$ $\kappa_{\infty}(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundetes System: $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$