Darstellung natürlicher und ganzer Zahlen (Vorlesung vom 13.11.2020)

Ziffernsysteme:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen.

Ziffernsysteme: Definition und Beispiele.

Satz: Die Menge aller Ziffernketten $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Positionssysteme:

Definition und Beispiele.

Dezimal- und Dualdarstellung natürlicher Zahlen.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Ganze Zahlen:

Erweiterung der Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

Dualdarstellung mit Vorzeichenbit.

Darstellung negativer ganzer Zahlen im Rechner: Zweierkomplement.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

anschaulich:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Bruchrechenregeln:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}\,, \qquad\qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}\,.$$

mathematisch präzise:

Konstruktion von $\mathbb{Q}$ durch Abschluß von $\mathbb{Z}$ unter Division:

Äquivalenzklassen von Paaren (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Darstellung von $\mathbb{Q}$

Satz:
Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ induziert eine Zifferndarstellung von $\mathbb{Q}$.

Ziffernmenge: $\mathcal{Z} \cup \{-\} \cup \{/\}$

Folgerung: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beispiele: Dezimalsystem, Dualsystem

q-adische Brüche

$$z_n \;\cdots\; z_0,\; z_{-1} \;\cdots\; z_{-m} \;=\; \sum_{i=-m}^{n} z_i\, q^i \;, \qquad z_i \in 0,\ldots,q-1, \quad n,m \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

$q = 10$: Dezimalbrüche, $q = 2$: Dualbrüche

Satz: Jeder Dualbruch ist ein Dezimalbruch, nicht umgekehrt.

Satz: Jeder q-adische Bruch ist eine rationale Zahl, nicht umgekehrt.

Periodische Dezimalbrüche

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,123123123... = 0,\overline{123}$

geometrische Reihe: $q > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{-(m+1)}}{1-q^{-1}} = \frac{1}{1-q^{-1}}$$

Satz:
Jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl und umgekehrt.

doppelte Darstellung: $1,\overline{0} = 0,\overline{9}$ Eindeutigkeit: $\overline{0}$ verboten!

Praktische Realisierung im Rechner

Darstellung als Paar von `integer`-Zahlen:

Länge muß variabel sein.

Aufwand für Rechenoperationen nicht a priori bekannt (Kürzen!)

Keine standardisierte Hardware-Unterstützung

Spezialanwendungen (Schnitterkennung in der Computergraphik)

Symbolik-Programme (MAPLE, MATHEMATICA,REDUCE,...)

Die reellen Zahlen

anschaulich:

unendliche Dezimalbrüche (oder q-adische Brüche):

$$\mathbb{R} = \{z_n \cdots z_0, z_{-1} z_{-2} \cdots \ | \ z_i = 0, \ldots, 9, \ \}$$

mathematisch präzise: Konstruktion von $\mathbb{R}$ durch

Vervollständigung von $\mathbb{Q}$: Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$.

Dedekindsche Schnitte: Menge von Paaren von Teilmengen von $\mathbb{Q}$

Abzählbarkeit und Zifferndarstellung

Erinnerung: Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Erinnerung: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Es gibt keine Zifferndarstellung von $\mathbb{R}$!

$$\boxed{\text{Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!}}$$

Absoluter und Relativer Fehler

absoluter Fehler: $|x - \tilde{x}|$.

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$: $|x - \tilde{x}| = 1$

relativer Fehler: $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$, $x \neq 0$.

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$: $|x - \tilde{x}|/|x| = 10^{-3}$

Festkommazahlen (q-adische Brüche)

$$z_{n-1}\, z_{n-2} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i\, q^i, \qquad z_i \in \{0, \ldots, q-1\}\,.$$

$\ell = m + n$ Stellen verfügbar; $\quad n$, $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$, $n = 3$, $m = 1$

$x = 0,123$, Runden: $\tilde{x} = 0,1 \qquad$ relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0.2$

$x = 123$, exakt darstellbar: $\tilde{x} = 123 \qquad$ relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Folgerung:
Im Sinne einer optimalen Stellenausnutzung n, m variabel halten!

Gleitkommazahlen $\mathbb{G}(\ell, q)$

Definition: (Gleitkommazahlen) Jede in der Form

$$\tilde{x} = (-1)^s a \cdot q^e \tag{1}$$

mit Vorzeichenbit $s \in \{0, 1\}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ und *Mantisse* $a = 0$ oder

$$a = 0, a_1 \cdots a_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \, q^{-i} \,, \qquad a_i \in \{0, \ldots, q-1\} \,,\; a_1 \neq 0 \,,$$

darstellbare Zahl $\tilde{x}$ heißt Gleitkommazahl mit *Mantissenlänge* $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$.
Die Menge all dieser Zahlen heißt $\mathbb{G}(q, \ell)$.
Die Darstellung (1) heißt normalisierte Gleitkommadarstellung.

Gleitkommadarstellungen

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

- $x = 123,456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^3$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$

- $x = 0,00123456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^{-2}$
  relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$