Kondition: Anwendungen

Vorlesung vom 11.12.20

Kondition nichtlinearer Gleichungen:

Problem: Finde x^*, so dass $g(x^*) = y^*$

Definition der absolute Kondition κ_{abs}:
Auswirkung von Fehlern in der rechten Seite y^* auf die Lösung

Satz:
Hinreichende Bedingungen für die Existenz von g^{-1} in einer Umgebung von y^*.

Äquivalentes Problem: Auswertung der Umkehrfunktion g^{-1} an der Stelle y^*

Satz: $\kappa_{\text{abs}} = |(g^{-1})'(y^*)| = |g'(x^*)|^{-1}$

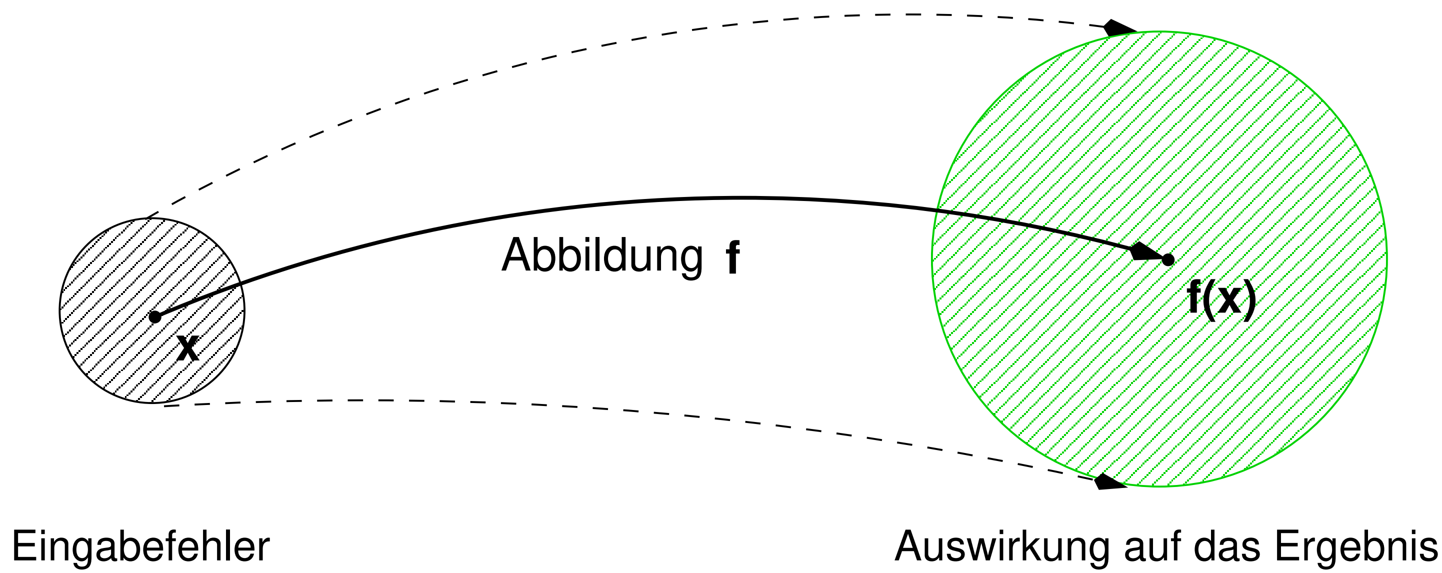
Definition und Berechnung der relativen Kondition: klar!

Grenzen der Genauigkeit

Ronaldinhos Kondition

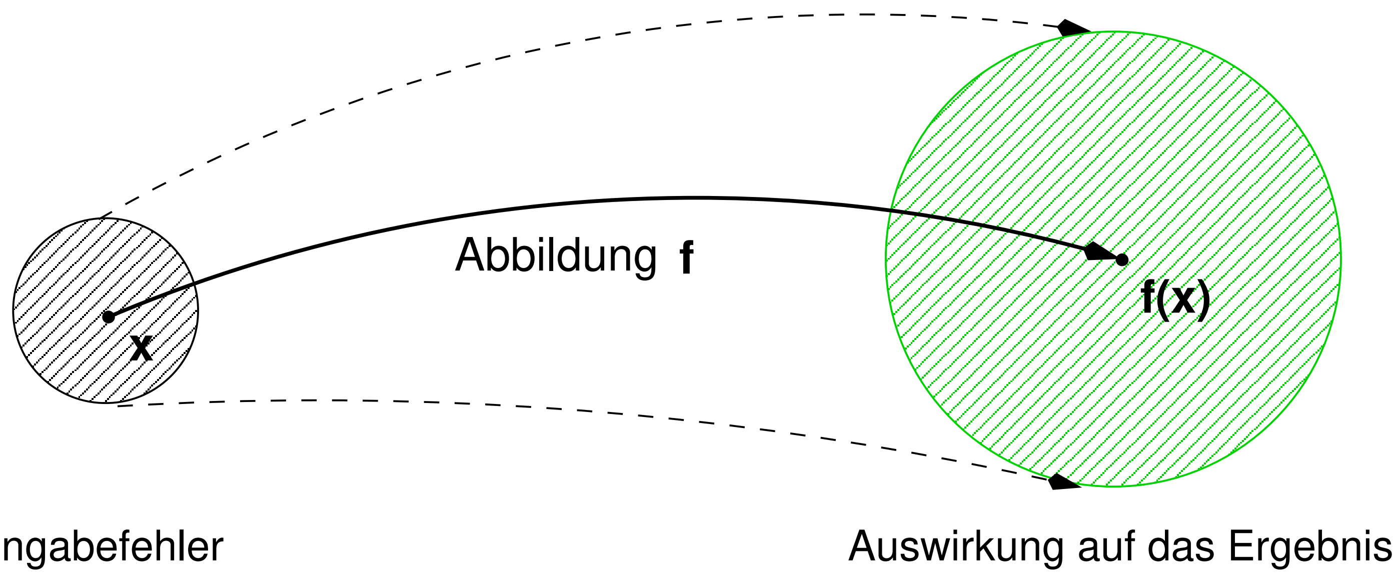
Kondition

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis:



Kondition

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis:



Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x-2a)^3$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x-2a)^3$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Was ist hier schief gelaufen?

Erinnerung: Computer können nicht rechnen!

Äquivalente Umformungen in $\mathbb{R}$ sind in Gleitkommaarithmetik nicht äquivalent.

Beispiele:

keine binomische Formel:

$$(a \tilde{+} b) \tilde{*} (a \tilde{+} b) \neq a \tilde{*} a \tilde{+} 2 \tilde{*} a \tilde{*} b \tilde{+} b \tilde{*} b$$

kein Assoziativgesetz:

$$(a \tilde{*} a \tilde{+} 2 \tilde{*} a \tilde{*} b) \tilde{+} b \tilde{*} b \neq a \tilde{*} a \tilde{+} (2 \tilde{*} a \tilde{*} b \tilde{+} b \tilde{*} b)$$

It is hard, but it's harder to ignore it Cat Stevens

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0) \ , \qquad g_1(x_0) = ax_0 \ , \quad g_2(y) = y + b$$

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0) \; , \qquad g_1(x_0) = ax_0 \; , \quad g_2(y) = y + b$$

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = h_2 \circ h_1(x_0) \; , \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a} \; , \quad h_2(y) = ay$$

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein Algorithmus ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0) \ , \qquad g_1(x_0) = ax_0 \ , \quad g_2(y) = y + b$$

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a} \ , \quad h_2(y) = ay$$

Welcher Algorithmus ist besser?

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0.

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0.

Realisierung im Rechner: Auswertungsfehler

$$\tilde{f}(x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0.

Realisierung im Rechner: Auswertungsfehler

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

...durch Runden nach jeder Elementaroperation:

$$\tilde{g}_i(y) = (1+\varepsilon_i) g_i(y), \quad |\varepsilon_i| \leq eps, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

Merksatz

$$\boxed{\text{Verschiedene Algorithmen führen zu verschiedenen Ergebnissen}}$$

...aber welcher Algorithmus ist besser?

Algorithmus A:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0)\ , \qquad g_1(x_0) = ax_0\ , \quad g_2(y) = y + b$$

Algorithmus B:

$$f(x_0) = ax_0 + b = a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = h_2 \circ h_1(x_0)\ , \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}\ , \quad h_2(y) = ay$$

Relative Stabilität: Auswirkung von Gleitkommarechnung

Bezeichnung: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ gegeben. Wir setzen $\|\varepsilon\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\varepsilon_i|$.

Definition 7.4: Die relative Stabilität σ_{rel} des Algorithmus'

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \neq 0$$

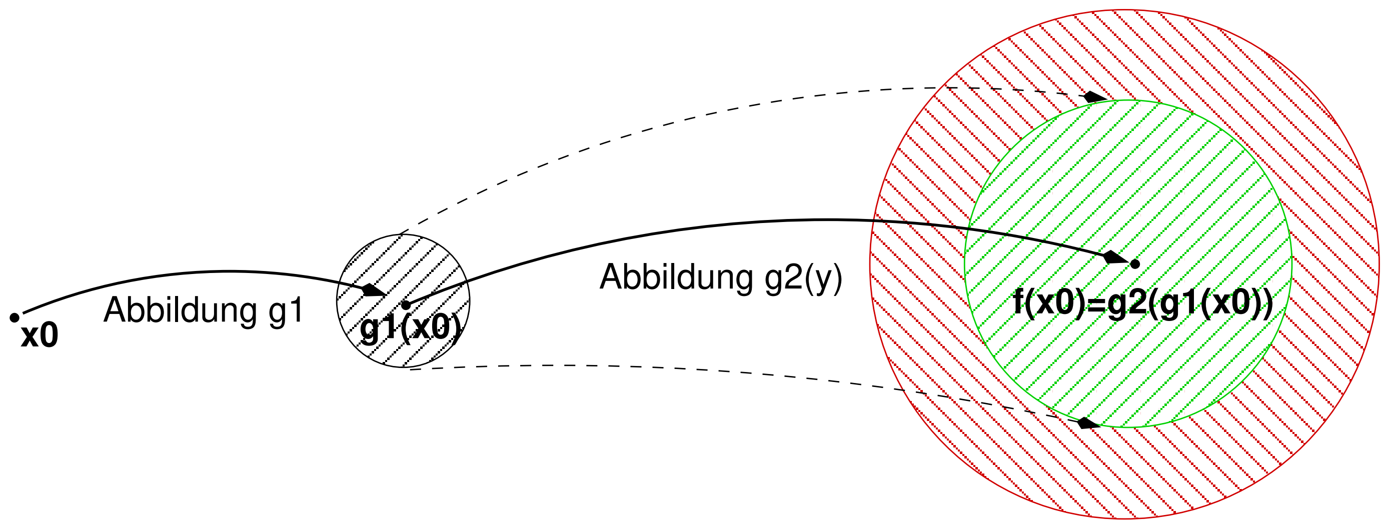
gegenüber Rundungsfehlern $\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i)$, $|\varepsilon_i| \leq eps$,
ist die kleinste Zahl σ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|) \ .$$

Liegt dies für keine reelle Zahl σ_{rel} vor, so wird $\sigma_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

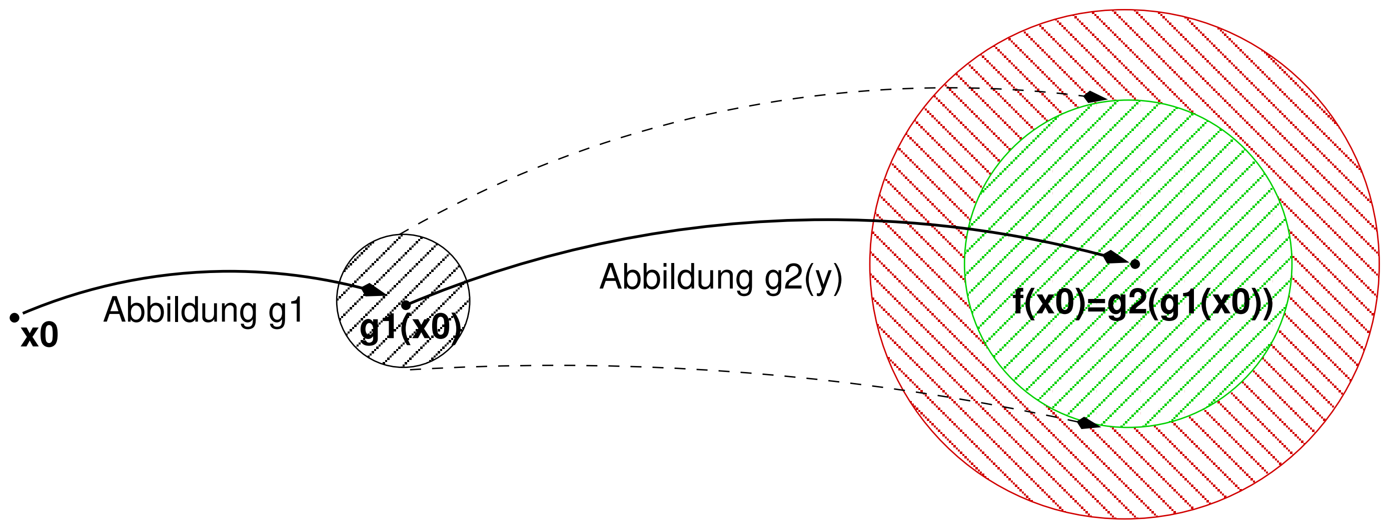
Stabilität

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis:



Stabilität

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis:



Die Stabilität ist eine Eigenschaft des Algorithmus!

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \tfrac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \tfrac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) \quad = \quad \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\;, \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x)\;, \qquad g_2(y_1) = \tfrac{1}{2}(1 - y_1)\;, \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(1 - (1+\varepsilon_1)\cos(2\pi)))}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1-y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(1-(1+\varepsilon_1)\cos(2\pi)))}\right) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1))}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)\ , \qquad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \qquad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(1 - (1+\varepsilon_1)\cos(2\pi)))}\right) \\
&= (1+\varepsilon_3)\left(1 + \sqrt{(1+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1))}\right)
\end{aligned}$$

Nicht reell auswertbar für beliebig kleine $\varepsilon_1 > 0$: $\quad \sigma_{\text{rel}} = \infty$

Stabilitätsabschätzungen: Grundrechenarten

Satz 7.9: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0)$, $h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \qquad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

$$\begin{aligned}
f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad &: \qquad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad &: \qquad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad &: \qquad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) = g(x_0)/h(x_0) \quad &: \qquad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,
\end{aligned}$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1}, und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0) \;, \qquad y_i = g_i(y_{i-1}) \;, \quad i = 1, \ldots, n \;, \qquad y_0 = x_0 \;.$$

Dann gilt

$$\sigma_{\mathrm{rel}} \le 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i \; = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)) \;.$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsanfang ($n = 1$)

trivialer Algorithmus: Sei

$$f(x_0) = g_1(x_0) \quad \text{und} \quad \tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_1(x_0) = (1+\varepsilon) f(x_0)$$

Dann gilt

$$\sigma_{\mathrm{rel}} = 1$$

Beweis:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} = \frac{|f(x_0) - (1+\varepsilon) f(x_0)|}{|f(x_0)|} = |\varepsilon|$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsschluss ($n-1 \Rightarrow n$)

Satz 7.6: Sei

$$y = h(x_0) = g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

und die Stabilität dieses Algorithmus sei σ_h, d.h.

$$\frac{|h(x_0) - \tilde{h}(\varepsilon, x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \sigma_h \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Sei weiter $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$ wobei κ_n die Kondition von g_n ist.

Dann gilt für die Stabilität σ_{rel} von $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$

$$\sigma_{\mathrm{rel}} \leq 1 + \kappa_n \sigma_h$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsschluss ($n-1 \Rightarrow n$)

Satz 7.6: Sei

$$y = h(x_0) = g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \dots \circ g_1(x_0)$$

und die Stabilität dieses Algorithmus sei σ_h, d.h.

$$\frac{|h(x_0) - \tilde{h}(\varepsilon, x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \sigma_h \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Sei weiter $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$ wobei κ_n die Kondition von g_n ist.

Dann gilt für die Stabilität σ_{rel} von $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$

$$\sigma_{\mathrm{rel}} \leq 1 + \kappa_n \sigma_h = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots))$$

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1}, und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \dots \circ g_1(x_0)\ , \qquad y_i = g_i(y_{i-1})\ , \quad i = 1, \dots, n\ , \qquad y_0 = x_0\ .$$

Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i \ = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots))\ .$$

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen verschlechtern die Stabilität!

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\,, \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)\ , \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)\ , \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1-y_1)\ , \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta,$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)\ , \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)\ , \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2,$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)\ , \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1+\sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2+\sqrt{2\delta}}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)\ , \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1+\sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2+\sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2)$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}\ , \quad x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $\quad f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)\ , \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)\ , \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \qquad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1-y_1|} = \frac{1-\delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1+\sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2+\sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2)$

beliebig große Schranke: $\quad 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \geq \frac{1-\delta}{6\sqrt{\delta}} \rightarrow \infty \quad$ für $\varepsilon \rightarrow 0$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

1. Merksatz

$$\boxed{\text{Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!}}$$

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + |\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)|$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + |\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)|$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)\ , \quad y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}\ , \quad h_2(y) = 1 + \sin(y)$

1. Merksatz

$$\boxed{\text{Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!}}$$

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + |\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)|$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)\ , \quad y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}\ , \quad h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\mathrm{rel}} \leq 1 + \kappa_2$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + |\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)|$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)$, $y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}$, $h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_2 = 1 + \frac{|y||\cos(y)|}{|1+\sin(y)|}$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + |\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)|$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)\ , \quad y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}\ , \quad h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\mathrm{rel}} \leq 1 + \kappa_2 = 1 + \frac{|y||\cos(y)|}{|1+\sin(y)|} \to 1 + \pi$

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g: $\quad \sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1+\kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g: $\quad \sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1+\kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

```
>>  abs(fh-fg)/abs(fh*eps)
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 =  2*3.1415926;
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)

fg =
    1.000000053726901

>> fh=1+sin(x0/2)

fh =
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g: $\sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1+\kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

```
>>  abs(fh-fg)/abs(fh*eps)

ans =
     6.174769669095370e+05
```

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 4.7: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1}, und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0) \ , \qquad y_i = g_i(y_{i-1}) \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \qquad y_0 = x_0 \ .$$

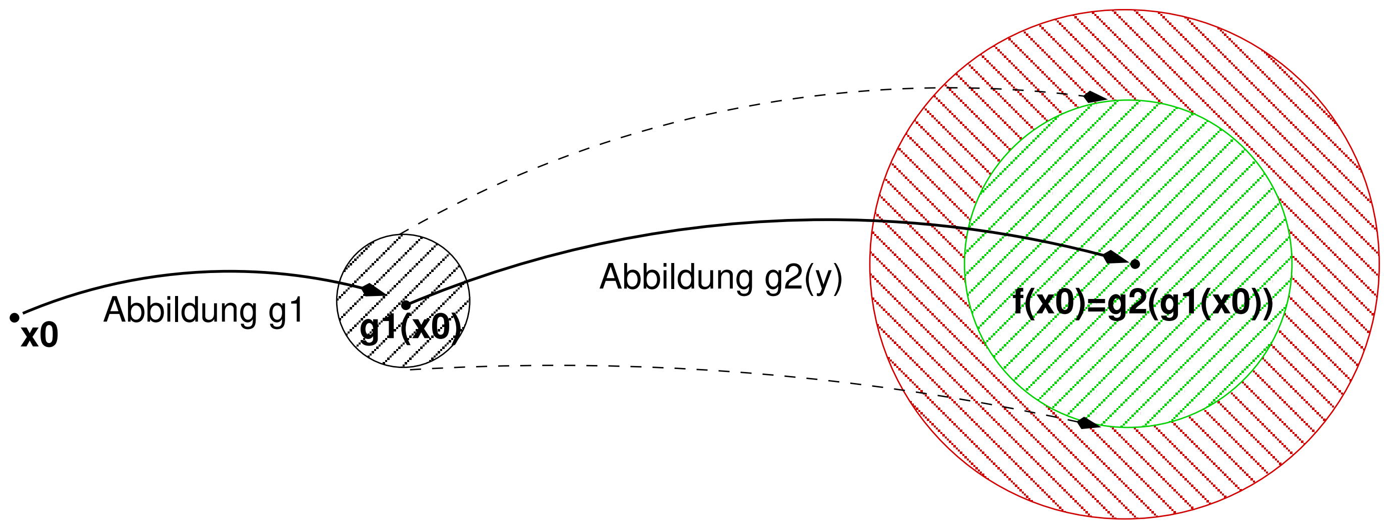
Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i \ = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots)) \ .$$

κ_1 geht nicht in die Abschätzung ein!

Stabilität

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis:



2. Merksatz

$$\boxed{\text{Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!}}$$

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Was ist hier schiefgelaufen?

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \;, \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \;, \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \;, \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \ , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \ , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

tatsächliche Fehlerverstärkung: $|8 - 393216|/(8eps) \approx 2.2 \cdot 10^{20}$

Eingabefehler und Auswertungsfehler: Gesamtfehler

Eingabefehler: $\dfrac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$ max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\dfrac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Satz 7.5: Es sei $x_0 \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$, g_i stetig differenzierbar und ε genügend klein. Dann gilt

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) \ .$$

σ_{rel}: Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle x_0.

κ_{rel}: rel. Kondition der Auswertung von f an der Stelle x_0.

Faustregel

$$\boxed{\text{Gesamtfehler} = \kappa * \text{Eingabefehler} + \sigma * \text{Auswertungsfehler!}}$$