

Stabilitätsanalyse

Vorlesung vom 18.12.20

Stabilität:

Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs. Abgrenzung zur Kondition.

Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung.

Definition und Beispiele.

Gesamtfehlerabschätzungen:

Satz 7.5: Der Gesamtfehler lässt sich abschätzen durch die Summe von Eingabefehler, verstärkt durch die Kondition, und Auswertungsfehler, verstärkt durch die Stabilität.

Stabilitätsabschätzungen:

Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität:

Grundrechenarten (Satz 7.9) und Elementarfunktionen (Satz 7.8). Beispiele.

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!

Das Polynom-Desaster in MATLAB: Grobe Stabilitätsanalyse.

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$ mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
393216
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
393216
```

```
>> f = (x-2*a)^3
```

```
f =  
8
```

Relative Stabilität: Auswirkung von Gleitkommarechnung

Bezeichnung: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ gegeben. Wir setzen $\|\varepsilon\| = \max_{i=1, \dots, n} |\varepsilon_i|$.

Definition 7.4: Die **relative Stabilität** σ_{rel} des Algorithmus'

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1(x_0) \neq 0$$

gegenüber Rundungsfehlern $\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i)$, $|\varepsilon_i| \leq \text{eps}$,
ist die kleinste Zahl σ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|) .$$

Liegt dies für keine reelle Zahl σ_{rel} vor, so wird $\sigma_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} , und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \dots \circ g_1(x_0), \quad y_i = g_i(y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad y_0 = x_0.$$

Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots)).$$

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen verschlechtern die Stabilität!

Stabilitätsabschätzungen: Grundrechenarten

Satz 7.9: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0), h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0), \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h . Dann gilt jeweils

$$f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0)/h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0), h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

$$\kappa * \text{Eingabefehler} + \sigma * \text{Auswertungsfehler} \\ = \text{Gesamtfehler}$$

$$\text{Eingabefehler: } \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} \quad \text{Auswertungsfehler: } \|\varepsilon\|$$

$$\text{resultierender Gesamtfehler: } \frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$$

Satz 7.5: Es sei $x_0 \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$, g_i stetig differenzierbar und ε genügend klein. Dann gilt

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) .$$

σ_{rel} : Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle x_0 .

κ_{rel} : rel. Kondition der Auswertung von f an der Stelle x_0 .

Polynomdesaster: Konditionsanalyse

$$f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$$

relative Kondition:

$$\kappa_{\text{rel}} = |f'(x_0)| \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} = 3(x_0 - 2a)^2 \frac{|x_0|}{|x_0 - 2a|^3} = \frac{3}{2} 10^7$$

Polynomdesaster: Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \\ g_1(x) &= x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3 \end{aligned}$$

Polynomdesaster: Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$$

Polynomdesaster: Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 - 2a, \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Polynomdesaster: Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 - 2a, \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$$

Gesamtfehler

Algorithmus 1:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{3}{2} 10^6 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 10^{21} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) .$$

Gesamtfehler

Algorithmus 1:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{3}{2} 10^6 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 10^{21} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) .$$

Algorithmus 2:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{3}{2} 10^6 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 4 \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) .$$

Gesamtfehler

Algorithmus 1:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{3}{2} 10^6 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 10^{21} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) .$$

Algorithmus 2:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{3}{2} 10^6 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 4 \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) .$$

kein Eingabefehler: $x_0 = \tilde{x}_0 = 2$

Kompliziertere Algorithmen

Kompliziertere Algorithmen

Systematische Stabilitätsanalyse

Beispiel

Problem: $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = (x_1^2 - 2(x_1x_2)) + x_2^2$

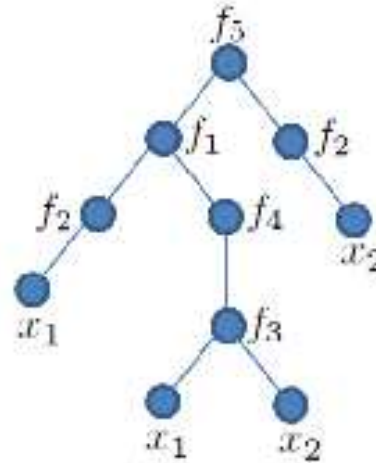
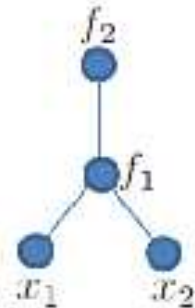
Algorithmus 1: $f(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2$$

Algorithmus 2: $f(x_1, x_2) = f_5\left(f_1\left(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\right), f_2(x_2)\right)$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

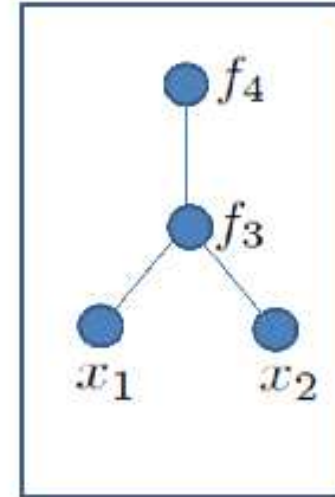
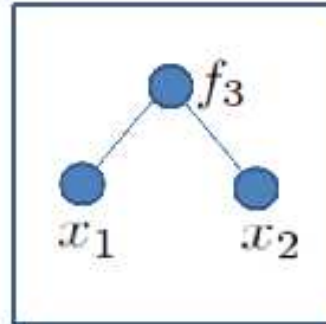
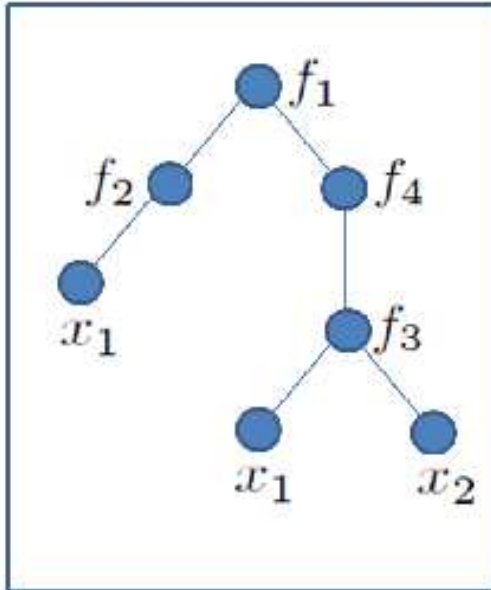
Auswertungsbäume



Algorithmus 1: $f(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2$

Algorithmus 2: $f(x_1, x_2) = f_5\left(f_1\left(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\right), f_2(x_2)\right),$
 $f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$

Teilbäume



Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter: nur ausgehende Kante

Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter: nur ausgehende Kante

Teilbäume β_i entstehen Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter: nur ausgehende Kante

Teilbäume β_i entstehen Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

Zerlegung in Teilbäume: $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]$, (bei uns immer $m \in \{1, 2\}$)

Gesamtzahl von Knoten: $\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \dots + \#\beta_m$

Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter: nur ausgehende Kante

Teilbäume β_i entstehen Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

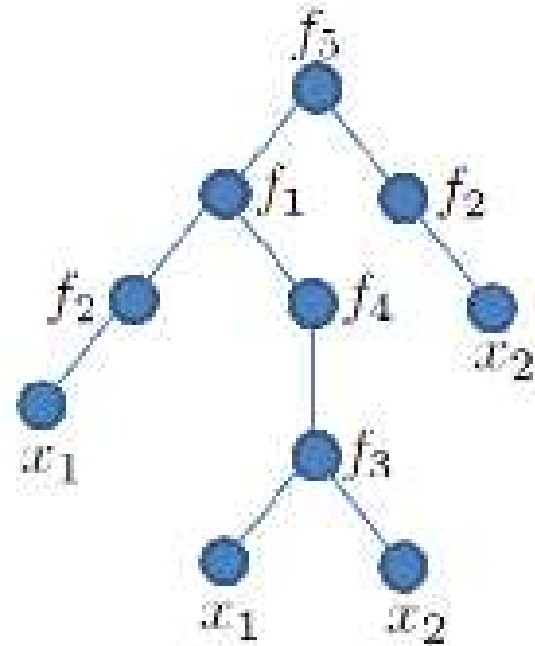
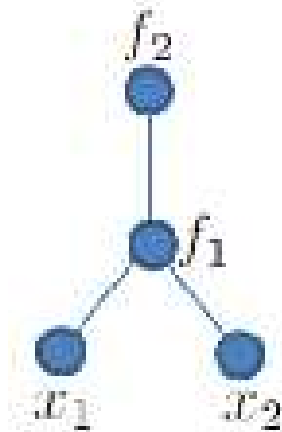
Zerlegung in Teilbäume: $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]$, (bei uns immer $m \in \{1, 2\}$)

Gesamtzahl von Knoten: $\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \dots + \#\beta_m$

trivialer Baum: nur einen Knoten (seine Wurzel): Eingabewerte

$$\beta = [], \quad \text{mit} \quad \#\beta = 1.$$

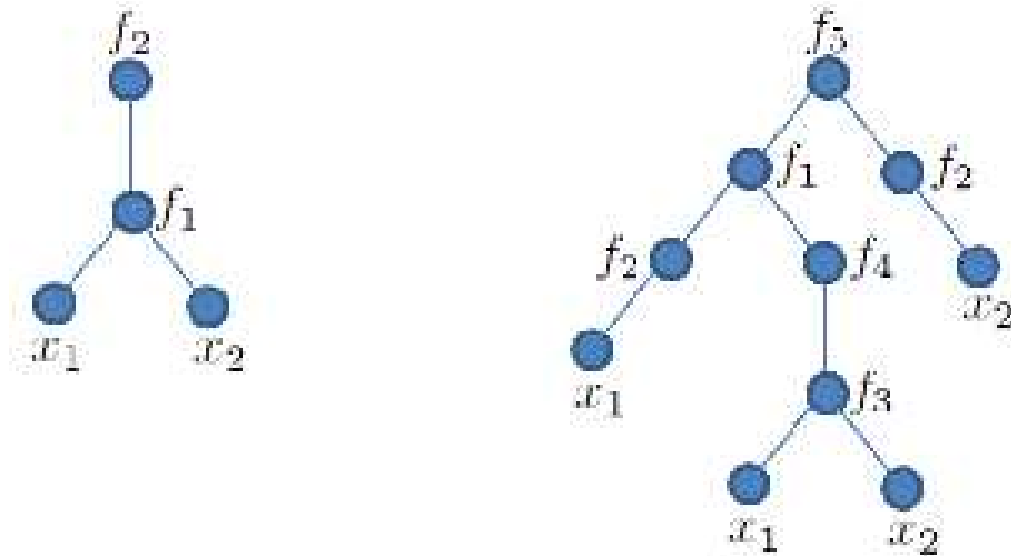
Algorithmus 1:



$$\beta_{F_1} = [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

Die Blätter $\beta_{0,1} = \beta_{0,2} = []$ stehen für Eingabewerten x_k in $\beta_{0,k}$, $k = 1, 2$.

Algorithmus 2:



$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}]$$

$$\beta_{21} = [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}]$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Zwischenergebnisse mittels Auswertungsbäumen

Zuordnung von Elementarfunktionen und Eingabedaten:

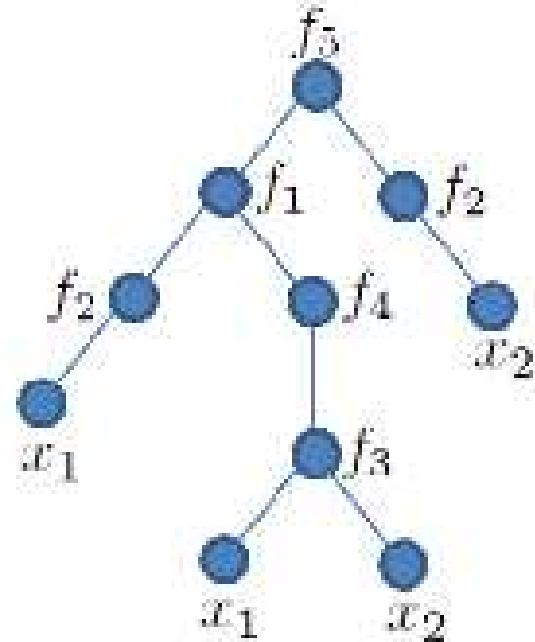
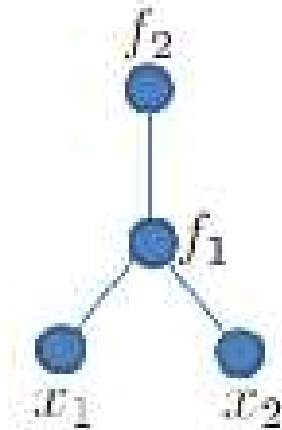
Eingabewert $\leftrightarrow$ Blatt Elementarfunktion $\leftrightarrow$ Knoten

Zwischenergebnisse für jeden Teilbaum β :

Wurzel: Zwischenfunktion f^β Zwischenergebnis: z^β

$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{falls } \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_m}) & \text{falls } \#\beta = m + 1 > 1, \beta = [\beta_1, \dots, \beta_m] \end{cases}$$

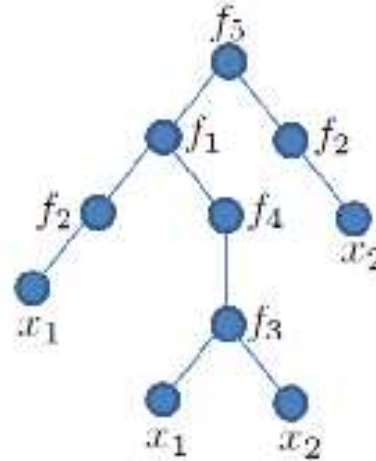
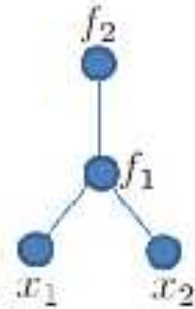
Algorithmus 1:



$$\beta_{F_1} = [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}]$$

Die Blätter $\beta_{21} = \beta_{22} = []$ stehen für Eingabewerten x_k in β_{2k} , $k = 1, 2$.

Algorithmus 1:

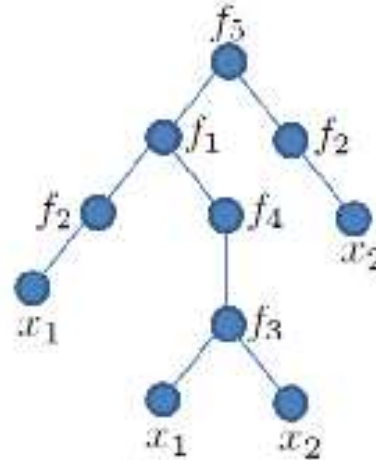
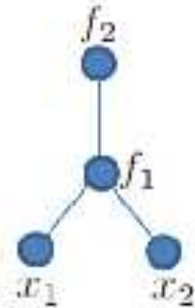


$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$f^{\beta_{F_1}} = f_2, \quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$$

$$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}] : \quad z^{\beta_{21}} = x_1, \quad z^{\beta_{22}} = x_2, \quad f^{\beta_1} = f_1, \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}})$$

Algorithmus 2:



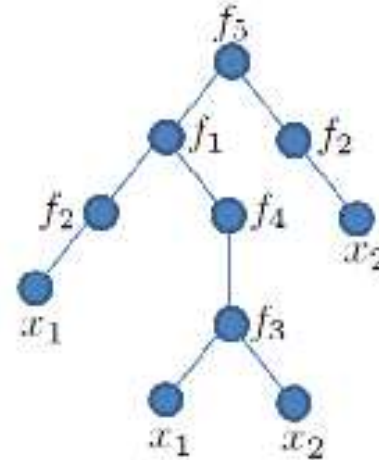
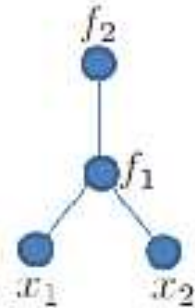
$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}]$$

$$\beta_{21} = [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}]$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Algorithmus 2:



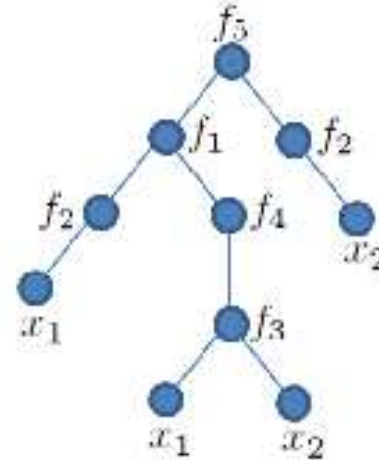
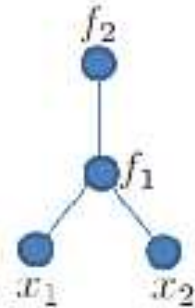
$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}]$$

$$\beta_{21} = [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Algorithmus 2:



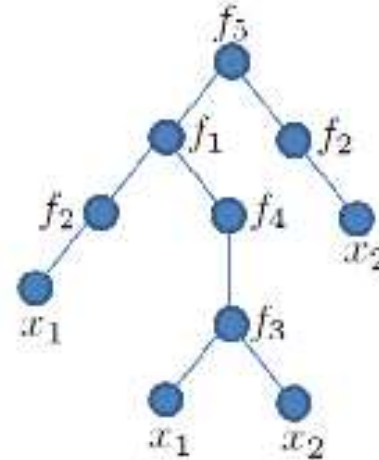
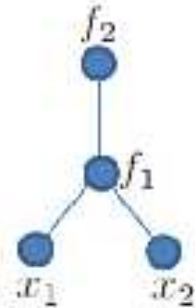
$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}]$$

$$\beta_{21} = [\beta_{31}], \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Algorithmus 2:



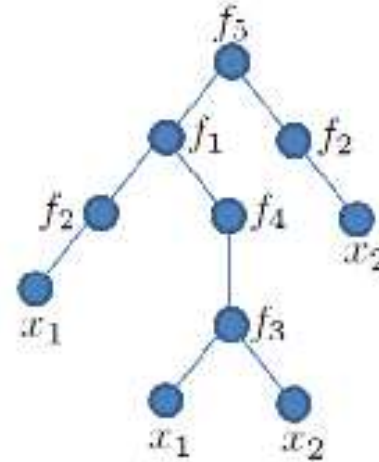
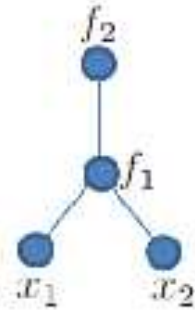
$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}]$$

$$z^{\beta_{21}} = f_2(x_1), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Algorithmus 2:



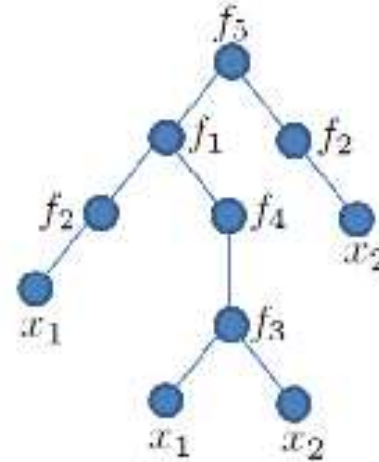
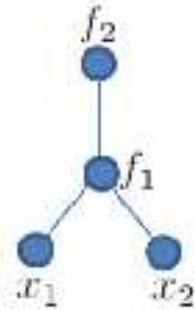
$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad z^{\beta_{12}} = f_2(x_2)$$

$$z^{\beta_{21}} = f_2(x_1), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Algorithmus 2:



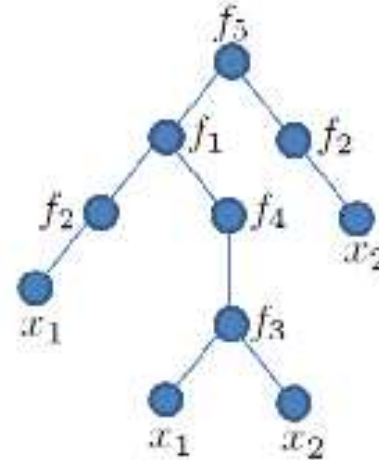
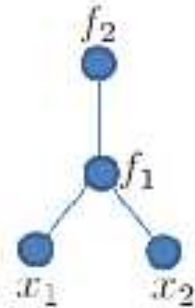
$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

$$z^{\beta_{11}} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}), \quad z^{\beta_{12}} = f_2(x_2)$$

$$z^{\beta_{21}} = f_2(x_1), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Algorithmus 2:



$$z^{\beta_{F2}} = f_5(z^{\beta_{11}}, z^{\beta_{12}})$$

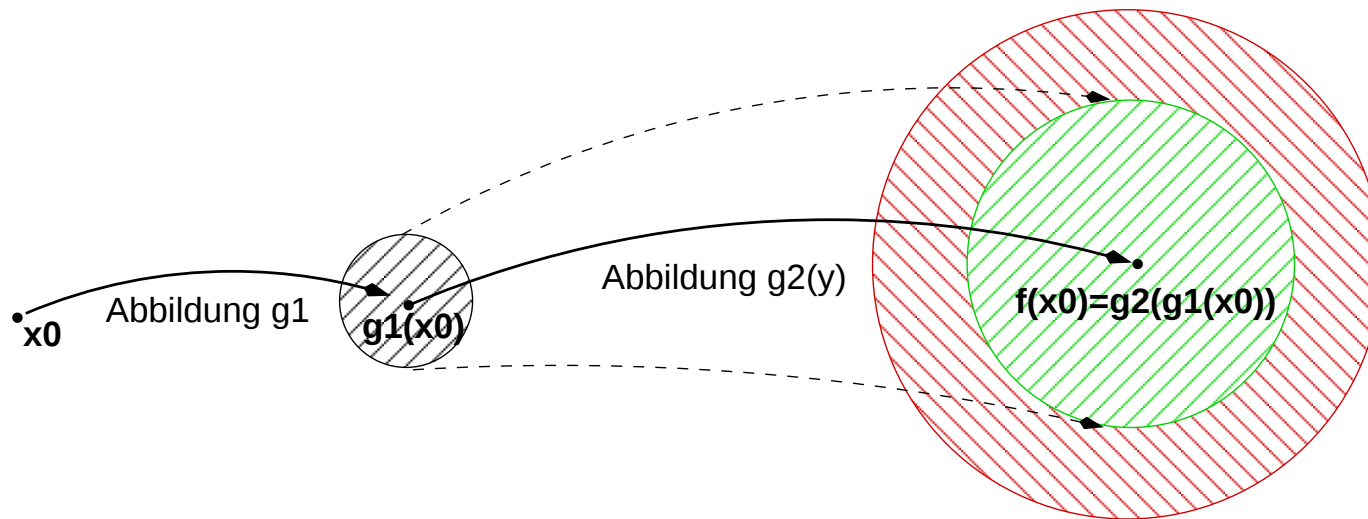
$$z^{\beta_{11}} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}), \quad z^{\beta_{12}} = f_2(x_2)$$

$$z^{\beta_{21}} = f_2(x_1), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)$$

Blätter $\beta_{31} = []$, $\beta_{41} = []$ und $\beta_{23} = []$, $\beta_{42} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2 .

Rekursive Stabilitätsabschätzung

Auswirkung von **Störungen der Elementarfunktionen** auf das Ergebnis:



Rekursive Stabilitätsabschätzung

Satz 7.6: $h : I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$, $g : I_g \mapsto \mathbb{R}$, $f = g \circ h : I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$ mit Stabilität σ_h

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmus zur Auswertung von $f(x_0) = g(h(x_0))$

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Die Kondition von $g(y_0)$, $y_0 = h(x_0)$, ist κ_g .

Stabilitätsschranke: $\sigma_f \leq 1 + \kappa_g \sigma_h$

Stabilitätsabschätzungen: Grundrechenarten

Satz 7.9: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0), h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0), \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h . Dann gilt jeweils

$$f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0)/h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0), h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

Rekursive Abschätzung der Fehlerverstärkung

Zwischenergebnisse:

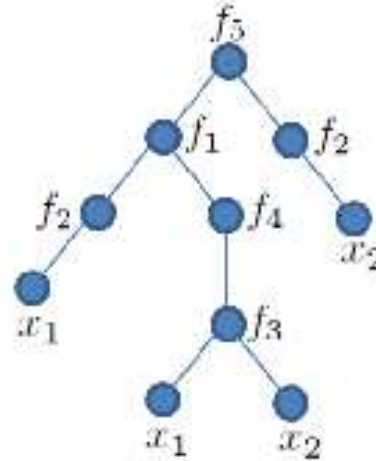
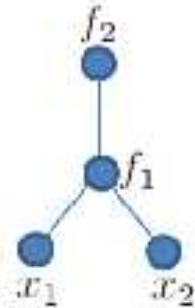
$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{falls } \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_m}) & \text{falls } \#\beta = m + 1 > 1, \beta = [\beta_1, \dots, \beta_m] \end{cases}$$

Fehlerverstärkung für Teilbaum:

$$\sigma^\beta \leq \begin{cases} 1 & \text{falls } \#\beta = 1 \\ 1 + \kappa(f^\beta) \max(\sigma^{\beta_1}, \dots, \sigma^{\beta_m}) & \text{falls } \#\beta = m + 1 > 1, \\ & \text{und } \beta = [\beta_1, \dots, \beta_m] \end{cases}$$

$\kappa(f^\beta)$: relative Kondition der Auswertung von f^β in $z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_m}$

Algorithmus 1:



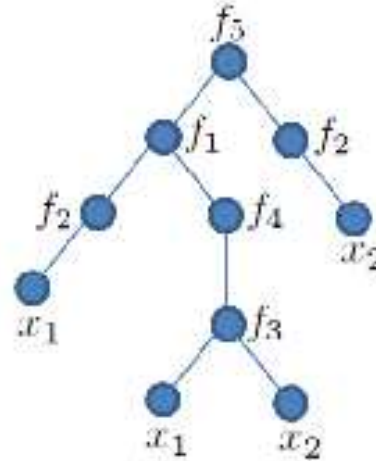
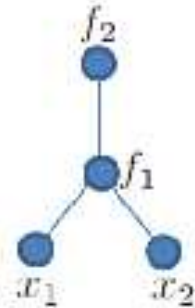
$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) ,$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}})$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:



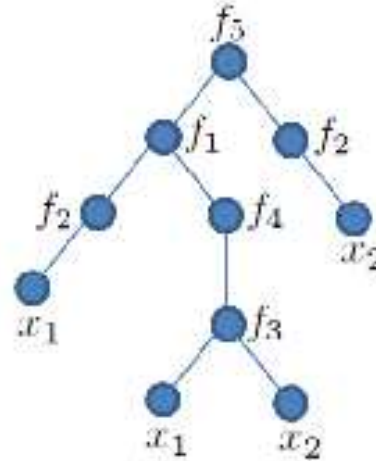
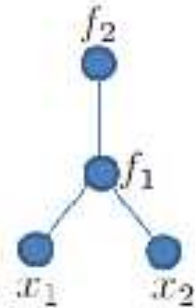
$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) \quad ,$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:



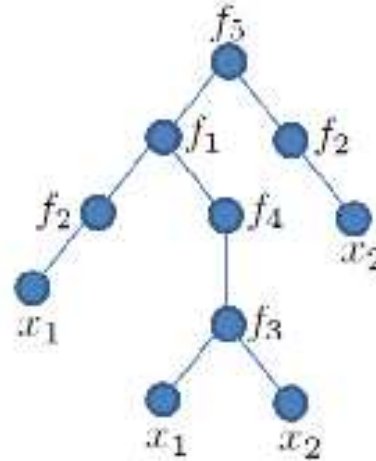
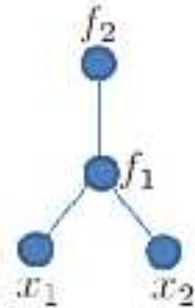
$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:



$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

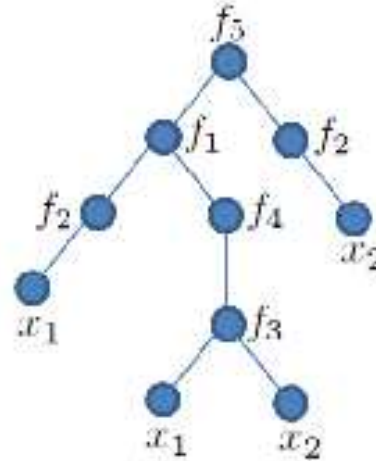
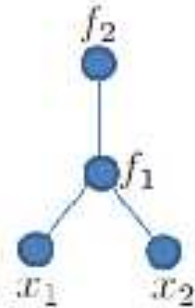
$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

$$\kappa_2 = \frac{|f_2'(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:



$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

$$\kappa_2 = \frac{|f_2'(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2 \quad \sigma^{F_1} = 1 + \kappa_2 \sigma^{\beta_1} = 3$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Gesamtfehlerverstärkung

Satz 7.5: Gesamtfehler = $\kappa * \text{Eingabefehler} + \sigma * \text{Auswertungsfehler}$

Gesamtfehlerverstärkung

Satz 7.5: Gesamtfehler = κ * Eingabefehler + σ * Auswertungsfehler

relative Kondition der Auswertung von: $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

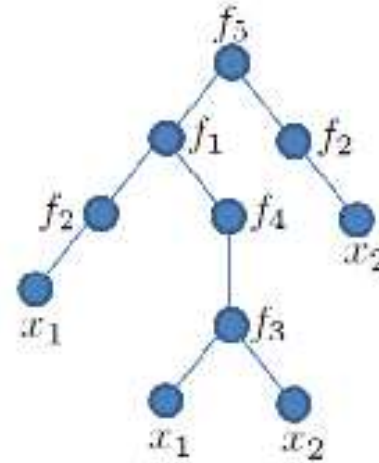
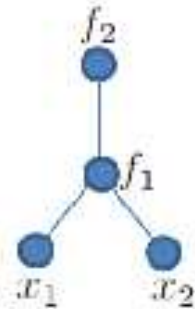
Gesamtfehlerverstärkung

Satz 7.5: Gesamtfehler = κ * Eingabefehler + σ * Auswertungsfehler

relative Kondition der Auswertung von: $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

Funktion mit mehr als einer Variablen

Direkter Weg: Algorithmus 1:



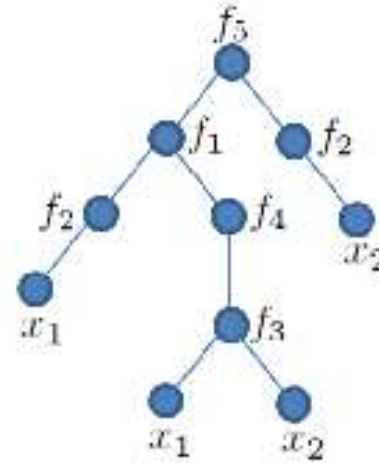
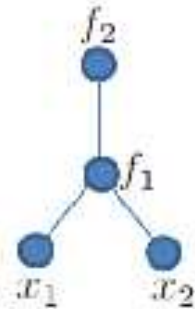
$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) \quad ,$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}})$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:



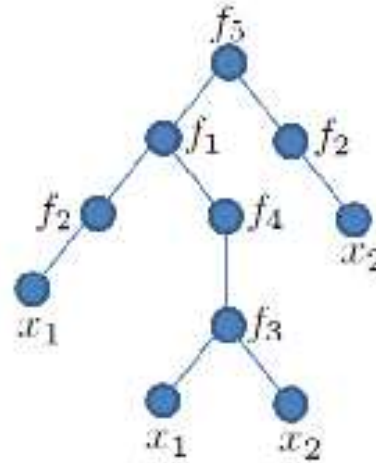
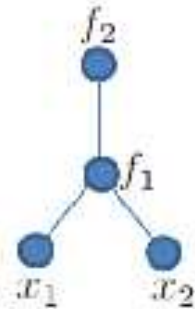
$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) ,$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11}$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:



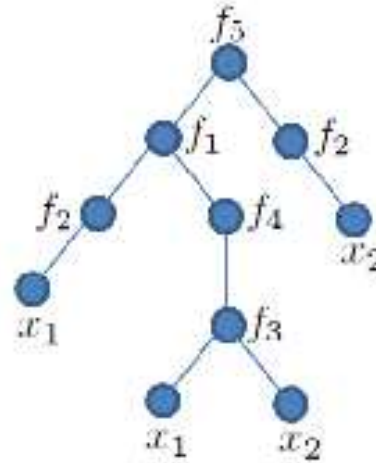
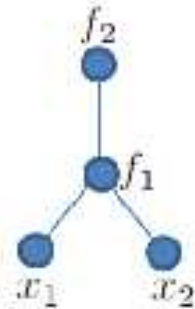
$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11}$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:



$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

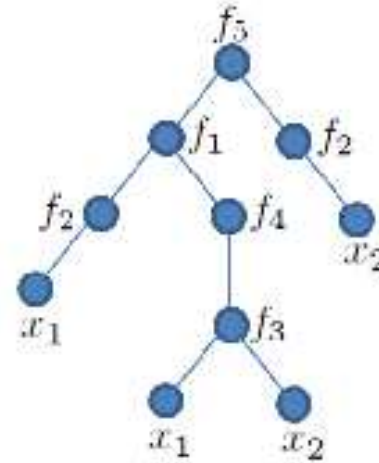
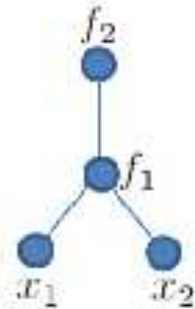
$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

$$\kappa_2 = \frac{|f'_2(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11}$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:



$$\beta_{F_1} = [\beta_1] :$$

$$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

$$\kappa_2 = \frac{|f_2'(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2 \quad \sigma_{ges}^{F_1} = 1 + \kappa_2 \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + 4 \cdot 10^{11}$$

$$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}] : \quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11}$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Kompliziertere Algorithmen

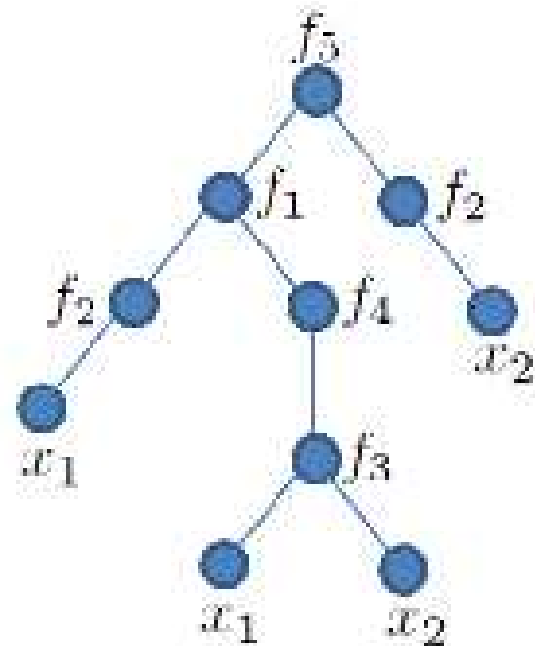
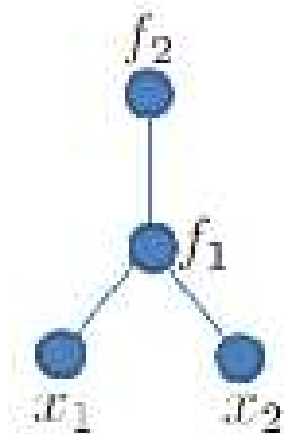
Systematische Analyse des Gesamtfehlers

Kompliziertere Algorithmen

Systematische Analyse des Gesamtfehlers
kann der Computer übernehmen!

Automatische Fehleranalyse

Eingabedaten $x_1, \dots, x_n$, Elementarfunktionen g_i , Ableitungen g'_i



Vergleich von Algorithmus 1 und 2

Algorithmus 1: $F_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$$

Algorithmus 2: $F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2(x_1x_2)) + x_2^2$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\left(f_1\left(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\right), f_2(x_2)\right)$$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Vergleich von Algorithmus 1 und 2

Algorithmus 1: $F_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$$

Algorithmus 2: $F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2(x_1x_2)) + x_2^2$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\left(f_1\left(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\right), f_2(x_2)\right)$$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

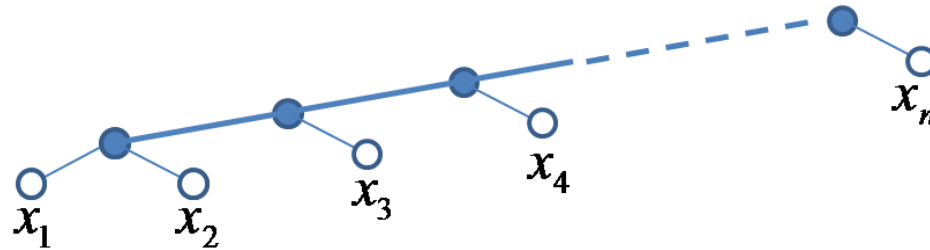
Gesamtfehlerverstärkung:

$$\sigma^{F_1} \leq 1 + 4 \cdot 10^{11} \quad \sigma^{F_2} \leq 44 \cdot 10^{22}$$

Auswertung der Summe positiver Zahlen

$$S = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \quad a_k > 0$$

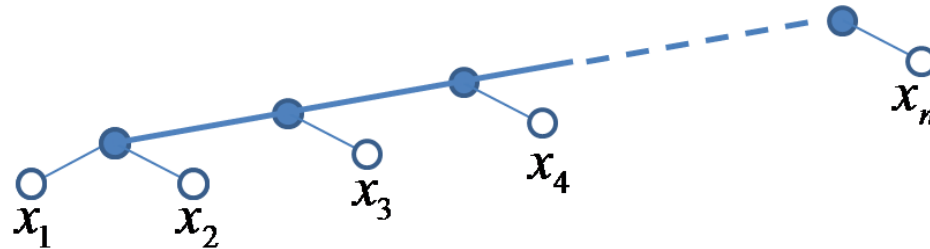
Rekursive Summation: `S = a[1]; for i=2:1:m S = S + a[i]; end`



Auswertung der Summe positiver Zahlen

$$S = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \quad a_k > 0$$

Rekursive Summation: `S = a[1]; for i=2:1:m S = S + a[i]; end`



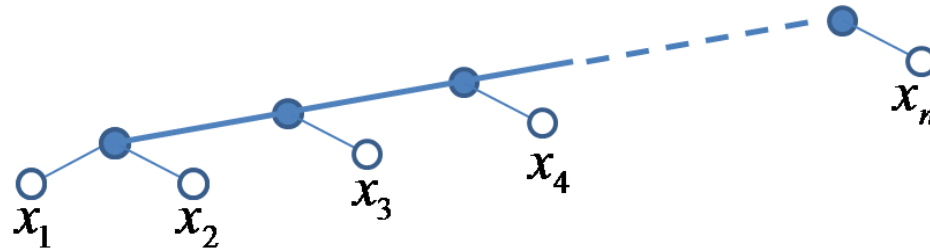
Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_{i+1}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i}, 1\} = 1 + \sigma^{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \sigma^{\beta_1} = 1$$

Auswertung der Summe positiver Zahlen

$$S = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \quad a_k > 0$$

Rekursive Summation: `S = a[1]; for i=2:1:m S = S + a[i]; end`

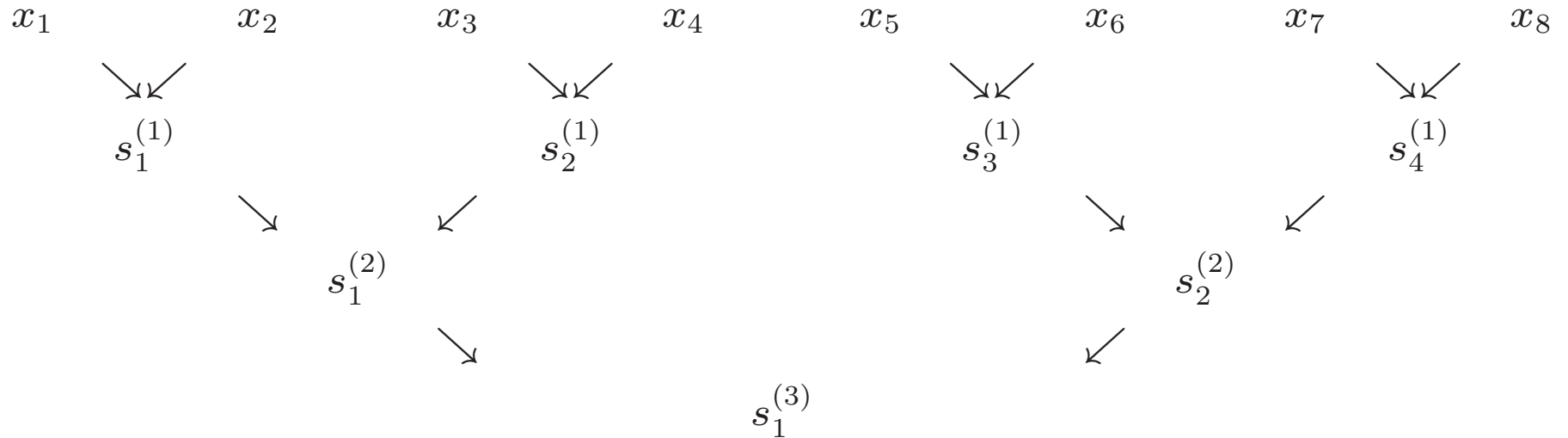


Rekursive Stabilitätsanalyse

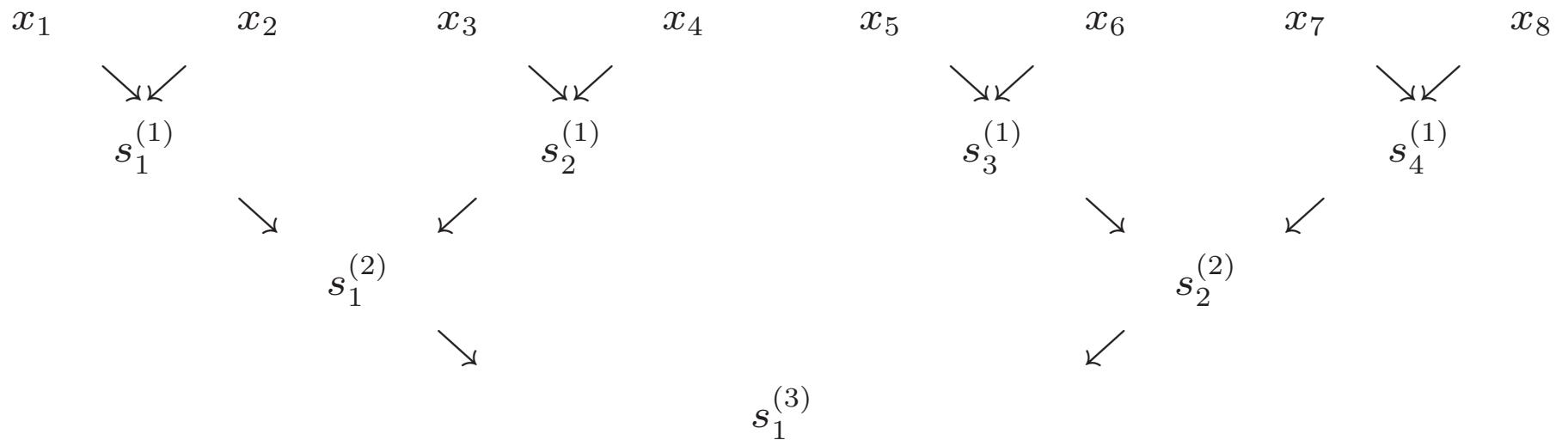
$$\sigma^{\beta_{i+1}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i}, 1\} = 1 + \sigma^{\beta_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \sigma^{\beta_1} = 1$$

Fehlerverstärkung bei rekursiver Summation: $\sigma_{Rek} \leq n$

Hierarchische Summation ($n = 2^m$)



Hierarchische Summation ($n = 2^m$)

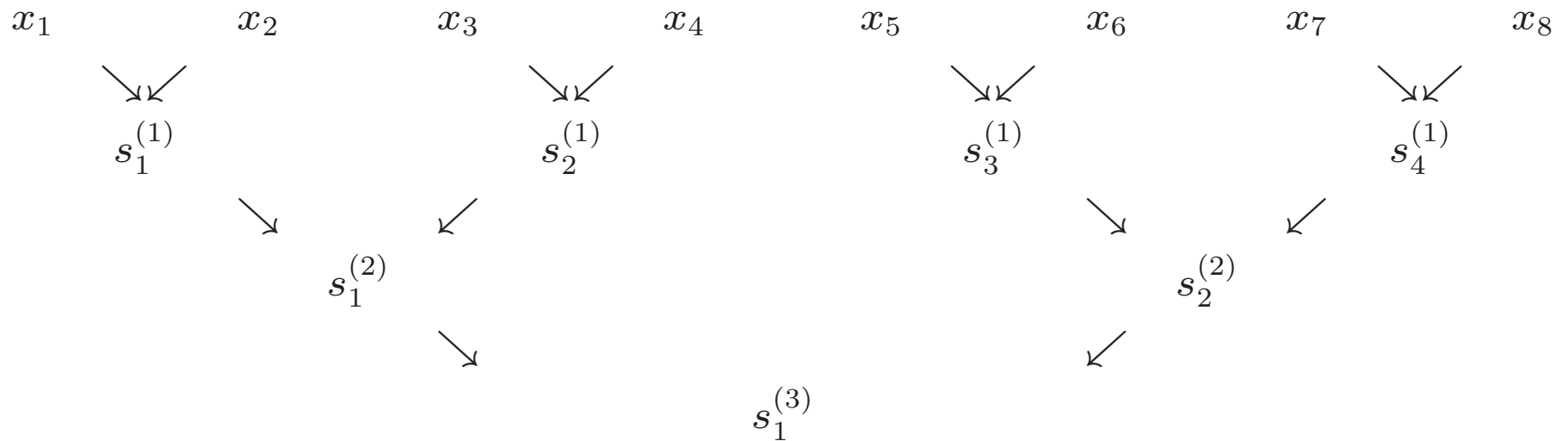


Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_i^{(k+1)}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i^{(k)}}, \sigma^{\beta_{i+1}^{(k)}}\},$$

$$\sigma^{\beta_i^{(0)}} = 1$$

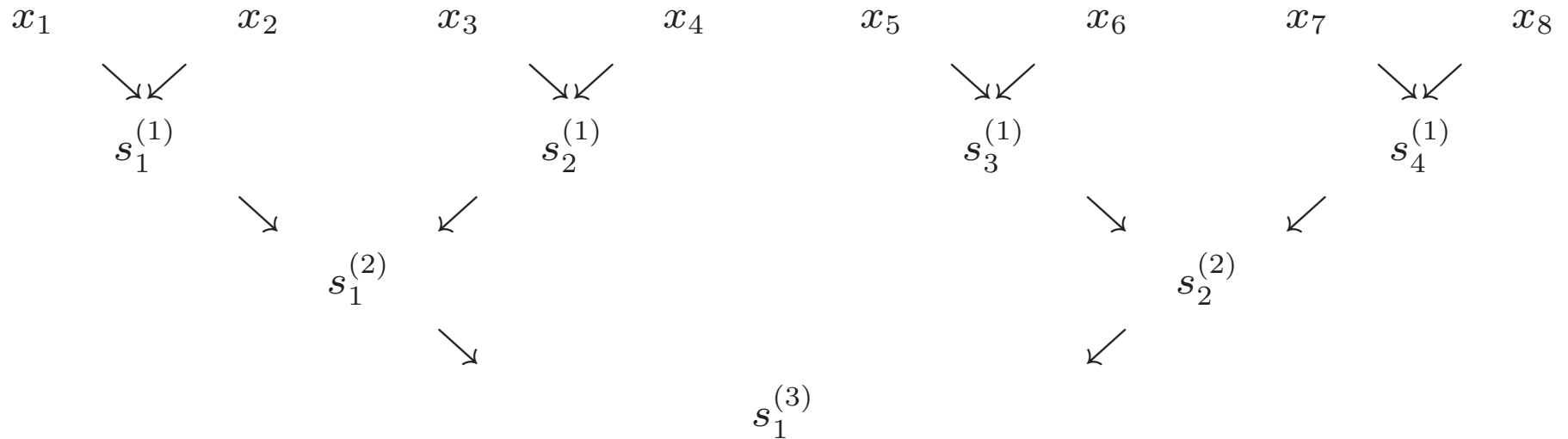
Hierarchische Summation ($n = 2^m$)



Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_i^{(k+1)}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i^{(k)}}, \sigma^{\beta_{i+1}^{(k)}}\}, \quad k = 1, \dots, \log_2(n), \quad \sigma^{\beta_i^{(0)}} = 1$$

Hierarchische Summation ($n = 2^m$)



Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_i^{(k+1)}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i^{(k)}}, \sigma^{\beta_{i+1}^{(k)}}\}, \quad k = 1, \dots, \log_2(n), \quad \sigma^{\beta_i^{(0)}} = 1$$

Fehlerverstärkung bei hierarchischer Summation: $\sigma_{Rek} \leq 1 + \log_2(n)$

Numerisches Beispiel

Genauigkeit: $\ell = 7$ Dezimalstellen

Problem: Summation von $n_j = 2^J$ Zufallszahlen $a_k \in (0, 1)$, $J = 1, \dots, 15$

