Aufwand und Komplexität

Vorlesung vom 15.1.21

Komplexität und Effizienz

Aufwand eines Algorithmus': Maximale Anzahl dominanter Operationen (worst-case).

Ordnung: Landau-Symbol $O(n)$. Beispiel.

Komplexität eines Problems: Kleinstmöglicher Aufwand

Summation

Aufwand: rekursive und hierarchische Summation. Komplexität: $n - 1 = O(n)$

Sortieren

Aufwand: TumbSort, BubbleSort und MergeSort. Komplexität: $O(n \log n)$

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $\mathbf{a \geq b}$:

Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen.

Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen (worst-case!).

Strukturelle Einsicht: Kongruenzen (Gauß 1801), Rekursionssatz.

Euklidischer Agorithmus: Aufwand: $\mathcal{O}(\log(b))$ Divisionen.

Numerische Mathematik und Scientific Computing

Problem: Eingabedaten und Komplexität

Kondition: Wie wirken sich Eingabefehler aus?

Numerische Mathematik und Scientific Computing

Problem: Eingabedaten und Komplexität

Kondition: Wie wirken sich Eingabefehler aus?

Algorithmus: Auswertungsfehler und Aufwand

Stabilität: Wie wirken sich Auswertungsfehler in meinem Algorithmus aus?

Aufwand: Wie aufwendig ist mein Algorithmus?

Lineare Gleichungssysteme

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme

eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & + \ \ 7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & + \ \ 8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +\ \ 7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & +\ \ 8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} x_3 \qquad = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & + \;\; 7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & + \;\; 8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x = b$$

Matrix-Vektor- und Matrixprodukt

Matrix-Vektor-Produkt:

Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$, Vektor $x = (x_i)_{i=1} \in \mathbb{R}^{n}$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n} \; , \qquad (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Matrixprodukt:

Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$AB = ((AB)_{ij})_{ij=1}^{n} \; , \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung:

diskrete stationäre Prozesse

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung:

diskrete stationäre Prozesse

Diskretisierung:

mathematische Modelle kontinuierlicher Prozesse:

gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, . . .

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung:

diskrete stationäre Prozesse

Diskretisierung:

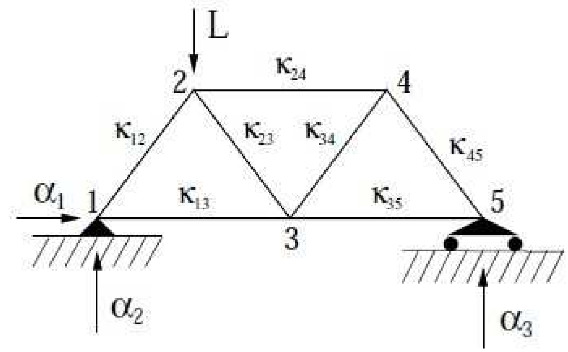
mathematische Modelle kontinuierlicher Prozesse:

gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, . . .

Linearisierung (Newton-Verfahren, . . .)

Beispiel: Lineares Stabwerk

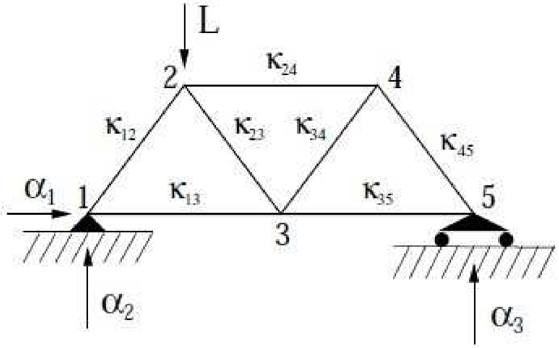
Brückenkonstruktion



gegeben: Knoten P_i, $i = 1, \ldots, 5$, Last L

gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (10 Unbekannte)

Beispiel: Lineares Stabwerk



Brückenkonstruktion

gegeben: Knoten P_i, $i = 1, \ldots, 5$, Last L

gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (10 Unbekannte)

mathematische Modellierung:

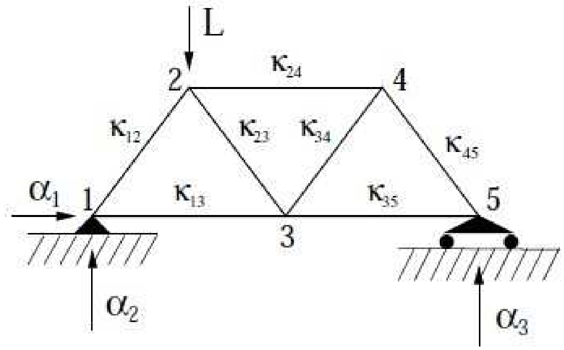
starre Stäbe $S_{ij} = P_i - P_j$, reibungsfreie Verbindung in den Knoten P_i

Kräftegleichgewicht: (2 Gleichungen)

$$P_1: \quad k_{12}S_{12}^* + k_{13}S_{13}^* + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\|S_{ij}\|_2}$$

Beispiel: Lineares Stabwerk

Brückenkonstruktion



gegeben: Knoten P_i,$i = 1, \ldots, 5$, Last L

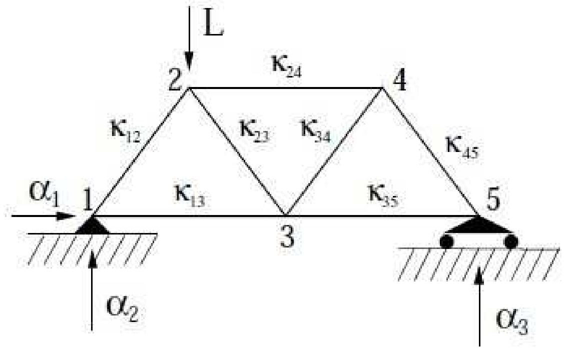
gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (10 Unbekannte)

mathematische Modellierung: $n = 2 \cdot 5$ Gleichungen für 5 Knoten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Beispiel: Lineares Stabwerk

Brückenkonstruktion



gegeben: Knoten P_i, $i = 1, \ldots, 5$, Last L

gesucht: Stabkräfte k_{ij}, Auflagekräfte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (10 Unbekannte)

mathematische Modellierung: $n = 2 \cdot 5$ Gleichungen für 5 Knoten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

kurz: $Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n$

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$$

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Aufwand und mögliche Aufwandsreduktion (Effizienz)

Kondition: Auswertung des Lösungsoperators

Lemma: Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär, so existiert die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Kondition: Auswertung des Lösungsoperators

Lemma: Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär, so existiert die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Problem:

$$\boxed{\text{Auswertung von } f(A,b) = A^{-1}b = x \in \mathbb{R}^n \text{ für } (A,b) \in \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^n}$$

Kondition: Auswertung des Lösungsoperators

Lemma: Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär, so existiert die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Problem:

$$\boxed{\text{Auswertung von } f(A,b) = A^{-1}b = x \in \mathbb{R}^n \text{ für } (A,b) \in \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^n}$$

Schwierigkeiten:

- Wie misst man den von $\tilde{A} \approx A$ und $\tilde{b} \approx b$?

Kondition: Auswertung des Lösungsoperators

Lemma: Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär, so existiert die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Problem:

$$\boxed{\text{Auswertung von } f(A,b) = A^{-1}b = x \in \mathbb{R}^n \text{ für } (A,b) \in \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^n}$$

Schwierigkeiten:

- Wie misst man den von $\tilde{A} \approx A$ und $\tilde{b} \approx b$?
- Wie berechnet man den maximalen Verstärkungsfaktor?

Linearer Raum (Vektorraum)

Definition: Auf der Menge V seien

Addition $a + b : V \times V \to V$, Multiplikation mit Skalaren $\alpha a : \mathbb{R} \times V \to V$

erklärt und haben folgende Eigenschaften

V ist Abelsche Gruppe (Assoziativität, Nullelement, negatives Element, Kommutativität)

Addition und Multiplikation sind verträglich, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$ gilt

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b\,, \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b \qquad \text{(Distributivität)}$$

$$1 \cdot a = a$$

Dann heißt V linearer Raum (Vektorraum) über $\mathbb{R}$.

Abstraktion des Längenbegriffs: Normen

Definition 8.1 Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|: \; V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x\| \geq 0 \;, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;, \tag{1}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\| \qquad \text{(Homogenität)} \;, \tag{2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \;. \tag{3}$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Beispiele: Vektornormen

$x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$

p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad , \quad 1 \le p < \infty$

Maximumsnorm (∞–Norm): $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

Matrixnormen

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in V = \mathbb{R}^{n,n}$, Matrizen mit n Zeilen und n Spalten

jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$
(interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$)

Matrixnormen

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in V = \mathbb{R}^{n,n}$, Matrizen mit n Zeilen und n Spalten

jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$
(interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$)

Verträglichkeit der Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ mit Matrix–Vektor–Multiplikation:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$$

Obere Schranke für die Längenänderung durch Multiplikation mit A.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition 8.8 Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ , \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\ ,$$

die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition 8.8 Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\,,$$

die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Bemerkung: Für zugehörige Matrixnormen gilt

- $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm.
- $\|Ax\| \leq \|A\|_M \, \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \, \|B\|_M \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

Satz 8.10 (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} \ ,$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

Satz 8.10 (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} \ ,$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung:
Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die zugehörige Matrixnorm.
Dann existiert ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^*\| = 1$ und $\|Ax^*\| = \|A\|_M$.

Konvergenz in normierten Räumen

Definition 8.4 Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Folge. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in V$, also

$$x^{(\nu)} \to x \ , \qquad \nu \to \infty \ ,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \to 0 \ , \qquad \nu \to \infty \ .$$

Konvergenz in normierten Räumen

Definition 8.4 Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in V$, also

$$x^{(\nu)} \to x \ , \qquad \nu \to \infty \ ,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \to 0 \ , \qquad \nu \to \infty \ .$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$, Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$

$$\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \to x \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \quad i = 1, \ldots, n$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerung: $\quad V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$

$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerung: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerung: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \quad i = 1, \dots, n$$