(1) Def seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume und $T: V \to W$, dann heißt T linear, wenn gilt
$$T(\lambda v + \mu w) = \lambda T(v) + \mu T(w) \quad \forall v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Beobachtung Eine Abb. $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear, wenn gilt: $\exists \tilde{T} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit
$$T(x) = \tilde{T}x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$$
Wenn V, W endlich dim. $\mathbb{R}$-VRe sind, dann ex. Isomorphismen $\Phi: \mathbb{R}^m \to V$, $\Psi: \mathbb{R}^n \to W$ wobei $m = \dim(V)$, $n = \dim(W)$ und zu jeder $T: V \to W$ linear ex. ein $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit

(2)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\Psi"] \\
V \arrow[r, "T"'] & W
\end{tikzcd}
$$

$$T(x) = \underbrace{\Psi\Big(\underbrace{\tilde{T}\overbrace{\Phi^{-1}(x)}^{\in \mathbb{R}^m}}_{\in \mathbb{R}^n}\Big)}_{\in W} = \Psi(\tilde{T}(\Phi(x))) \quad \forall x \in V$$

$\in V$

<u>Kurz</u>

$$T = \Psi \circ \tilde{T} \circ \Phi^{-1}$$

$$\tilde{T} = \Psi^{-1} \circ T \circ \Phi$$

③ <u>Anw</u> $V = \mathcal{P}_3$ $\quad T(p) = p'$

T ist linear, $T: V = \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2 = W$

Basis von $\mathcal{P}_3$ ist z.B. $1, x, x^2, x^3$

D.h. wir $p \in \mathcal{P}_3$ eindeutig schreiben als

$$p(x) = p_1 1 + p_2 x + p_3 x^2 + p_4 x^3$$

<u>Def</u> Für $\hat{p} \in \mathbb{R}^4$ def.

$$\Phi(\hat{p}) = \hat{p}_1 1 + \hat{p}_2 x + \hat{p}_3 x^2 + \hat{p}_4 x^3$$

Dann ist $\Phi: \mathbb{R}^4 \to V = \mathcal{P}_3$ ein Isom.

Für $\hat{q} \in \mathbb{R}^3$ def

$$\Psi(\hat{q}) = \hat{q}_1 1 + \hat{q}_2 x + \hat{q}_3 x^2$$

(4) $T: V = \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2 = W$

mit $T(p) = p'$

<u>Ang</u> $\hat{p} \in \mathbb{R}^4 \quad \Phi(\hat{p}) = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 x + \hat{p}_3 x^2 + \hat{p}_4 x^3$

$$q = T(\Phi(\hat{p})) = \hat{p}_2 + 2\hat{p}_3 x + 3\hat{p}_4 x^2$$

$$\Psi^{-1}(q) = (\hat{p}_2, 2\hat{p}_3 + 3\hat{p}_4)$$

$$\tilde{T}\begin{pmatrix}\hat{p}_1\\ \hat{p}_2\\ \hat{p}_3\\ \hat{p}_4\end{pmatrix} = (\Psi^{-1} \circ T \circ \Phi)(\hat{p}) = \begin{pmatrix}\hat{p}_2\\ 2\hat{p}_3\\ 3\hat{p}_4\end{pmatrix}$$

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(5) **Def** Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann heißt

$\operatorname{rank}(M) =$ „max. Anzahl linear unabhängiger Spalten / Zeilen"

der Rang von M.

$\Rightarrow \operatorname{rank}(M^T) = \operatorname{rank}(M)$

Def Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann heißt

$\ker(M) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Mx = 0\}$ Kern von M

und $\operatorname{ran}(M) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^m \text{ mit } y = Mx\} = M(\mathbb{R}^m)$

das Bild von M.

Lemma $\ker(M) \subseteq \mathbb{R}^m$

und $\operatorname{ran}(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind Vektorräume.

(6) **Satz** $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, dann $\dim(\mathrm{ran}(M)) = \mathrm{rank}(M)$.

Satz (Dimensionsformel) Es gilt für $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$
($M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$)

$$m = \dim(\mathrm{ran}(M)) + \dim(\ker(M))$$

d.h. $\dim(\ker(M)) = m - \mathrm{rank}(M)$.

Satz Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist

$$Mx = b$$

genau dann für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{rank}(M) = n$.

Dann heißt M regulär, sonst singulär.

7 Wie empfindlich ist

$$Ax = b$$

bezüglich Störungen von A und b?

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

Gilt: $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b \Rightarrow \tilde{x} \approx x$?

Was heißt „$\approx$" ? Idee Abstand/Unterschied von $A, \tilde{A}$ klein

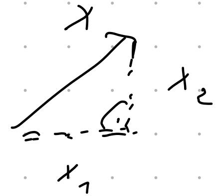
Def Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Dann heißt $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ eine Norm, wenn gilt

- $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$ $\quad \forall x \in V$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ $\quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\quad \forall x, y \in V$

(8) <u>Anschaulich</u> $\|v\|$ „Länge von v"

$\|x-y\|$ „Abstand"

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^n$



- Euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

- p-Norm

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } p \geq 1$$

- ∞-Norm

$$\|x\|_\infty := \max \{ |x_i| \mid i = 1, \dots, n \}$$

⑨ <u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|M\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |M_{ij}|^2}$$

Frobenius-Norm

<u>Def</u> Seien $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $|||\cdot||| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Normen, dann heißt für $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\|M\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Mx\|}{|||x|||} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ |||x||| = 1}} \|Mx\|$$

die zu $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ <u>gehörende Operatornorm</u> oder <u>induzierte Norm</u>.

<u>Lemma</u> Die Operatornorm ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{n \times m}$.

10 **Def** Seien $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n\times m}} : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$ Normen.

Dann heißt $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n\times m}}$ verträglich mit $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$, wenn gilt

$$\|Mx\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|M\|_{\mathbb{R}^{n\times m}} \|x\|_{\mathbb{R}^m} \quad \forall M \in \mathbb{R}^{n\times m}, \; x \in \mathbb{R}^m$$

Satz Die Operatornorm ist verträglich.

11 **Beispiel**

- Die zu $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ gehörige Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist
$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$
Zeilensummennorm

- Die zu $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{R}^n$ gehörige Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist
$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$$
Spaltensummennorm

- Die zu $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ gehörige Op.norm ist
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$
Spektralnorm.

(12) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$.

(I) Ist $A\tilde{x} = \tilde{b}$ lösbar?

(II) können wir

$$\|x - \tilde{x}\| \leq C \, \|b - \tilde{b}\| \; ?$$

(I) Ja.

(II) Satz Wenn $\|\cdot\|$ eine Operatornorm ist

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \quad \forall b \neq 0$$

wobei $\kappa(A) := \|A\| \, \|A^{-1}\|$

(13) Was ist, wenn wir

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \qquad (*)$$

betrachten?

<u>Satz</u> <u>Ang</u> $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$.

Dann gilt $\tilde{A}$ ist regulär, d.h. $(*)$ hat für alle $\tilde{b}$ eine eind. Lösung und es gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} + \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}\right) + o(\|A - \tilde{A}\|)$$

14 Orthogonalität

Eine Abb. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ heißt **Skalarprodukt**, wenn gilt

- $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, dann ist $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm. **Bsp.** $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow \|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

(15) $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn gilt

$\langle x, y \rangle = 0$.

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym, dann gilt

$$\operatorname{ran}(A) \perp \ker(A)$$

d.h. $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in \operatorname{ran}(A), y \in \ker(A)$

Beweis: Sei $x \in \operatorname{ran}(A)$, d.h. $x = Az$ und $y \in \ker(A)$

dann gilt

$$\langle x, y \rangle = \langle Az, y \rangle = \langle z, A^T y \rangle$$
$$= \langle z, Ay \rangle = \langle z, 0 \rangle = 0$$