Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

1. Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 20. November 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Auf der Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ werden folgende Relationen definiert:

a) $A \sim B$, falls $A \backslash B$ endlich ist;

b) $A \sim B$, falls $A \cap B$ endlich ist;

c) $A \sim B$, falls $A \triangle B$ endlich ist.

Untersuche, welche der Eigenschaften einer Äquivalrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) für diese drei Relationen erfüllt sind.

2. Aufgabe (4 TP)
Beweise oder widerlege für

$$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

die folgenden Aussagen.

a) f, g injektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv

b) f, g surjektiv $\Rightarrow f \circ g$ surjektiv

c) f injektiv, g surjektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv/surjektiv

d) f surjektiv, g injektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv/surjektiv

e) Es existiert ein bijektives f und ein injektives, aber nicht surjektives g, so dass $f \circ g$ bijektiv ist.

f) Es existiert ein surjektives f und ein nicht surjektives g, so dass $f \circ g$ surjektiv ist.

g) Es existiert ein nicht surjektives f und ein surjektives g, so dass $f \circ g$ surjektiv ist.

h) Es existiert ein nicht injektives f und ein injektives g, so dass $f \circ g$ injektiv ist.

(Notation: Seien A, B, C beliebige Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ Funktionen, dann heißt die Funktion

$$g \circ f : A \to C \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

die Komposition von f und g.)

3. Aufgabe (4 TP)
Finde ein Gegenbeispiel oder beweise für alle

$$f : A \to B,\ A_j \subset A,\ B_j \subset B,\ j \in J$$

die folgenden Aussagen.

a) $f(A_j) \subset f(A)$

b) $f^{-1}(f(A_j)) = A_j$

c) $f(A) \backslash f(A_j) = f(A \backslash A_j)$

d) $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

e) $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

f) $f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$

g) $f(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} f(A_j)$

h) $f^{-1}(B \backslash B_j) = A \backslash f^{-1}(B_j)$

4. Aufgabe (4 TP)
Beim Wettkampf im „Stein-Schere-Papier“ treten je zwei Teilnehmer genau einmal gegeneinander an und ermitteln einen Sieger. Zeige durch vollständige Induktion, dass die endlich vielen Teilnehmer so aufgereiht werden können, dass jeder über seinen unmittelbaren Nachfolger gesiegt hat.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.