Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

2. Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 27. November 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (8 TP)
Für die Paare natürlicher Zahlen $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $(a',b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir die Relation

$$(a,b) \sim (a',b') \qquad :\Leftrightarrow \qquad b' + a = b + a'.$$

mit den zugehörigen Äquivalenzklassen $[(a,b)] = \{(a',b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, (a,b) \sim (a',b')\}$ und

$$\mathbb{Z} := \{[(a,b)] \,|\, (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Ferner ist die Addition auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert als

$$x + y := [(x_1 + y_1, x_2 + y_2)]\,,$$

wobei $x = [(x_1, x_2)]$ und $y = [(y_1, y_2)]$.

a) Zeigen Sie, dass die Relation '$\sim$' eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der Addition eine Abelsche Gruppe ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Zeigen Sie mit Hilfe der Peano-Axiome das Wohlordnungsprinzip: "Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl."

3. Aufgabe (4 TP)
Zwei Mengen X und Y heißen gleichmächtig genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. Eine Menge X heißt abzählbar unendlich, falls X und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist.

b) Für eine nichtleere Menge M sei F die Menge aller Abbildungen von M nach $\{0,1\}$. Beweisen oder wiederlegen Sie, dass M und F gleichmächtig sind.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.