

3. Übung zur Vorlesung

ANALYSIS I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 04. Dezember 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls die Menge der Folgenglieder $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, d.h. es existieren Zahlen \bar{S} und \underline{S} mit den Eigenschaften

$$\underline{S} \leq a_n \leq \bar{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

2. Aufgabe (4 TP)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) mit Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{K}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{K}$.

- Zeigen Sie, dass $a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b$ gilt.
- Sei nun $b_n \neq 0 \forall n$ und $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$ gilt.

3. Aufgabe (4 TP)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} (oder \mathbb{R}).

- Zeigen Sie, dass $(a_n + b_n)$ eine Cauchy-Folge ist.
- Zeigen Sie, dass $(a_n - b_n)$ eine Cauchy-Folge ist.
- Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)$ eine Cauchy-Folge ist.
- Sei nun $b_n \neq 0 \forall n$ und (b_n) keine Nullfolge. Zeigen Sie, dass (a_n/b_n) eine Cauchy-Folge ist.

4. Aufgabe (4 TP)

Zeigen oder widerlegen Sie die Konvergenz folgender Zahlenfolgen (x_n) für $n \rightarrow \infty$. Sie sollen dabei mindestens eine Teilaufgabe direkt unter Verwendung der Definition von Konvergenz bearbeiten und mindestens eine durch Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte.

- $x_n = \frac{20n^2 + 3n - 5}{7n^2 + 101n + 42}$,
- $x_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$,
- $x_n = \left(\sqrt{4n^2 + n}\right) - 2n$,
- $x_n = \frac{n^2 + n^{-2}}{n + n^{-1}}$.

ALLGEMEINE HINWEISE

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.