Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

4. Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 11. Dezember 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (2 TP)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen mit $a_n > 0$ und $b_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = -\infty.$$

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge.

a) Zeigen Sie, dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchyfolge ist.

b) Zeigen Sie ohne Verwendung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass die Differenz der beiden Folgen gegen Null konvergiert, d.h. $a_k - a_{n_k} \to 0$ für $k \to \infty$.

3. Aufgabe (4 TP)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Ferner gelte, dass alle konvergenten Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert x konvergieren. Zeigen Sie, dass dann auch die ganze Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

4. Aufgabe (6 TP)
Zeigen Sie, dass konvergente Folgen genau einen Häufungspunkt haben. Untersuchen Sie für die angegebenen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ob diese konvergieren, divergieren, beschränkt sind, oder gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gehen und bestimmen Sie alle Häufungspunkte.

a) $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$;

b) $x_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$;

c) $x_n = \sqrt[n]{n}$;

d) $x_n = \frac{q^n}{n^p}$ für beliebige feste $q > 1,\ p \in \mathbb{N}$;

e) $x_n = n^p q^n$ für beliebige feste $0 < q < 1,\ p \in \mathbb{N}$;

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.