

5. Übung zur Vorlesung

ANALYSIS I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 18. Dezember 2020, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)

Betrachten Sie die alternierende harmonische Reihe

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

die konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

- Geben Sie eine divergente Umordnung der Reihe an.
- Geben Sie eine Umordnung der Reihe an, die gegen 2020 konvergiert.

2. Aufgabe (4 P)

Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x und y und für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

3. Aufgabe (4 P + 2 Bonus P + 2 Bonus P)

Beweisen Sie, dass für eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe gilt:

- Es existiert eine Umordnung, die divergiert.
- Es existiert eine Umordnung, die gegen ∞ bzw. $-\infty$ geht.
- Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ existiert eine Umordnung, die gegen c konvergiert.

4. Aufgabe (4 P)

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$:

- Der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A liegt in A .
- Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus A$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A$.

5. Aufgabe (4 Bonus TP)

Eine neugierige, unsterbliche Schnecke sitzt am festgebundenen Ende eines zunächst einen Kilometer langen, unzerreißbaren Gummiseils dessen anderes Ende eine furchtsame, aber gleichfalls unsterbliche Mathematikerin hält. Jede Nacht kriecht die Schnecke auf dem Seil einen Zentimeter in Richtung der Mathematikerin, die im Gegenzug das Seil jeden Tag um einen Kilometer dehnt. Erreicht die Schnecke jemals die Mathematikerin? Falls ja, wann? Falls nein, wann ist der Abstand zwischen beiden größer als der Erdumfang (Schätzung)?

ALLGEMEINE HINWEISE

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.