Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

7. Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 15. Januar 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Bonuspunkte)
Prüfen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und geben Sie die Stetigkeitsgebiete an. Verwenden Sie mindestens einmal das Epsilon-Delta-Kriterium und mindestens einmal das Folgenkriterium:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-17x+4}{x-4}, & \text{für } x \neq 4 \\ -1, & \text{für } x = 4. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{n}}, & \text{für } x \geq 0 \\ -|x|^{\frac{1}{n}}, & \text{für } x < 0. \end{cases}$, mit festem $n \in \mathbb{N}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{für } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

e) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), \quad \text{für } x \neq 0, \quad f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$

f) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

2. Aufgabe (4 Bonuspunkte)
Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz stetiger Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

a) $f : [0,1] \to \{0,1\};$

b) $f : [0,1] \to [0,1] \cap \mathbb{Q};$

c) $f : [0,1] \cap \mathbb{Q} \to [0,1] \cap \mathbb{Q};$

d) $f : [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \{0,1\}.$

3. Aufgabe (4 Bonuspunkte)
Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert $y \in \mathbb{R}$

a) genau $x = 2$ mal

b) genau $x = 3$ mal

annimmt?

4. Aufgabe (4 Bonuspunkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ im Intervall $[a, b]$, wobei $a = 1$ und $b = 2$ ist.

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f (Lösung $x^* = \sqrt{2}$) mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus der Vorlesung bis auf zwei Nachkommastellen genau.

b) (Optional) Schreiben Sie eine Funktion in ihrer Lieblings-Programmiersprache, die die Lösung von a) bis auf fünf Nachkommastellen genau bestimmt. Geben Sie zu jeder Iteration die Intervallsgrenzen an.

c) Sei x^k der Mittelpunkt des Intervalls nach der k-ten Intervallhalbierung und x^* die Lösung des Problems. Zeigen Sie, dass die a-priori Fehlerabschätzung

$$|x^k - x^*| \leq 2^{-k}(b - a), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.