Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

8. Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 22. Januar 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen:

a) f ist stetig.

b) Die Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. für jede offene Menge U ist auch $f^{-1}(U) \subseteq D$ offen.

c) Die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, d.h. für jede abgeschlossene Menge A ist auch $f^{-1}(A) \subseteq D$ abgeschlossen.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f genau dann Lipschitz-stetig auf D, wenn eine Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in D$$

gilt.

a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion auf $D = \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion auf dem Intervall $[\varepsilon, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion auf $D = \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Wo sind folgende Funktionen stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar?

a) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$

b) $g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$

d) $j(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$

4. Aufgabe (4 Punkte)
Für $b > 0$ und $b \neq 1$ ist der Logarithmus einer positiven reellen Zahl x zur Basis b definiert durch

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Rechenregeln gelten:

a) $\log_b(b^y) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$, d.h. $\log_b(x)$ ist diejenige Zahl y mit $b^y = x$.

b) $\log_b(x \cdot x') = \log_b(x) + \log_b(x') \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$;

c) $\log_b(\frac{x}{x'}) = \log_b(x) - \log_b(x') \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$;

d) $\log_b(x^n) = n \log_b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\},\ n \in \mathbb{N}$;

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.