Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

9. Übung zur Vorlesung

# Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

**Abgabe: Fr., 29. Januar 2021, 12:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie für eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$:

a) Ist $f'$ in $x \in (a, b)$ differenzierbar, so gilt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

b) Wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

existiert, so ist $f$ in $x$ differenzierbar und die Ableitung ist der obige Grenzwert.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Ausdrücke und bestimmen Sie den Definitionsbereich der Ableitungen.

a) $e^x \sin(x)$

b) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c) $e^{-x^2}$

d) $\log \frac{1+x}{1-x}$

e) $x^x$

f) $\sqrt{\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}}, \quad \alpha, \beta > 0$

g) $x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$

h) $(\log(\tan(x)))^{-\frac{1}{3}}$

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall $I$ differenzierbare Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann die (nicht notwendigerweise stetige) Ableitung $f'$ den Zwischenwertsatz erfüllt: Zu beliebigen Werten $a, b \in I$ und $\alpha$ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ existiert ein Wert $c$ zwischen $a$ und $b$, so dass $f'(c) = \alpha$.

**4. Aufgabe** (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f$ auf einer beschränkten Menge auch Hölder-stetig ist.

b) Geben Sie eine Hölder-stetige Funktion an, die nicht Lipschitz-stetig ist.

## Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.