Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

10. Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 05. Februar 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (8 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, u und v seien zwei Punkte aus D. Eine Strecke $[u,v]$ mit u und v als Endpunkten ist definiert als die Menge aller Punkte

$$[u,v] := \{\lambda u + (1-\lambda)v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}\,. \tag{1}$$

Wir sagen, D ist genau dann konvex wenn für jedes Paar von Punkten $(u,v) \in D$ die Strecke $[u,v]$ in D enthalten ist. Ferner sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei D konvex ist. Dann ist der Epigraph der Funktion f definiert als

$$\text{epi}f := \{(w,a) \in D \times \mathbb{R} \mid f(w) \leq a\}. \tag{2}$$

a) Sei $D \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass D genau dann konvex ist, wenn D ein Intervall ist.

b) Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn der Epigraph von f konvex ist.

c) Sei f konvex, ferner seien die Punkte $x_i \in D$ und die Gewichte $\lambda_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ i = 1,\ldots,m$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Jensensche Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \tag{3}$$

gilt.

d) Sei f konvex. Zeigen Sie, dass die Funktion αf mit $\alpha > 0$ ebenfalls konvex ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar, wobei $h \neq 0$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

a) $k_1 := f \circ g$,

b) $k_2 := f/h$,

wieder k-mal differenzierbar für alle $x \in D$ sind.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x[2 - \sin(\log(x)) - \cos(\log(x))] & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Untersuchen Sie das Monotonie-Verhalten der Funktion f auf dem Intervall $[0,1]$.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.