

11. Übung zur Vorlesung

ANALYSIS I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 12. Februar 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} und beschränkt. Sei ferner

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(H), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(H).$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} f'(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = c$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften hat:

- a) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, (Positivität)
- b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, (Definitheit)
- c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, (Multiplikativität)
- d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung).

4. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$,
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(x)}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$.

ALLGEMEINE HINWEISE

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.