Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

12. Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

Abgabe: Fr., 19. Februar 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

c) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

d) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

b) $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge punktweise Konvergenz gegen den gleichen Grenzwert impliziert. Folgern Sie, dass gleichmäßige und punktweise Grenzwerte von Funktionenfolgen eindeutig sind (wenn sie existieren).

b) Geben Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig differenzierbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die punktweise aber nicht gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

4. Aufgabe (4 Punkte)
In vielen Programmiersprachen ist die Funktion $\operatorname{atan2} : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{atan2}(x,y) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{wenn } x > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{wenn } x < 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{wenn } x < 0 \text{ und } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x = 0 \text{ und } y < 0, \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass atan2 ist eine stetige Abbildung nach $(-\pi, \pi]$ ist und sich jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ als $z = |z|e^{i\varphi}$ mit $\varphi = \operatorname{atan2}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ schreiben lässt.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.